

# МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 17



Ярославль 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Ярославский государственный технический университет»

**МАТЕМАТИКА  
И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

Выпуск 17

Ярославль  
Издательство ЯГТУ  
2022

УДК 51:378  
ББК 22.1  
М34

**М34 Математика и естественные науки. Теория и практика:** Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. – 180 с.

ISBN 978-5-9914-0946-9

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, информатики и методики их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378  
ББК 22.1

Редакционная коллегия: А. Н. Жаров (председатель), А. В. Бородин,  
Д. О. Бытев, Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг.

Рецензенты: кафедра высшей математики и системного моделирования сложных процессов ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России»; В.И. Бачурин, д-р физ.-мат. наук, доцент Ярославского филиала Физико-технологического института им. К.А. Валиева РАН.

ISBN 978-5-9914-0946-9

© Ярославский государственный  
технический университет, 2022

# МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.51

**В. В. Абрамов**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

## УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

*Исследована нормальная неавтономная система дифференциальных уравнений с малым параметром. Используются свойства первого нелинейного приближения оператора монодромии. Установлен признак устойчивости нулевого решения по параметру и по части переменных.*

**Ключевые слова:** система дифференциальных уравнений, устойчивость, оператор монодромии, малый параметр

**V. V. Abramov**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@365.rsu.edu.ru

## STABILITY OF ZERO SOLUTION OF A PERIODIC SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER

*A normal non-autonomous system of differential equations with a small parameter is investigated. The properties of the first nonlinear approximation of the monodromy operator are used. The criterion of stability of the zero solution with respect to the parameter and part of the variables is established.*

**Keywords:** system of differential equations, stability, monodromy operator, small parameter

Классические результаты исследований свойства устойчивости нулевого решения по части переменных получены на основе метода функций Ляпунова [1, 2]. Для систем с малым параметром признаки устойчивости по части переменных были получены на основе комбинации прямого ме-

тогда Ляпунова и метода усреднения [3]. В данной работе для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которой периодична по независимой переменной, задача об устойчивости по части переменных решается по схеме, основанной на локальной оценке первого приближения оператора монодромии [4, 5].

Рассмотрим в линейном пространстве  $\Pi = \mathbb{R}^n$  систему возмущенных движений вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \mu), \quad f(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n, \quad (1)$$

в которой локально достаточно гладко зависящая от фазовой переменной  $x$  и непрерывно зависящая от малого параметра  $\mu \in \mathbb{R}$  правая часть является  $\omega$ -периодической интегрируемой по  $t$ ,  $f'_x(t, 0_n, 0) \equiv 0_n$ . Обозначим как  $x(t, a, \mu)$  решение системы (1) с начальным значением  $x(0, a, \mu) = a$ .

Для оценки возмущений части компонент решения целесообразно дать определение способа нормировки прямой суммы пространств.

Допустим,  $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ , где  $\Pi$ ,  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  – линейные пространства, причем  $\Pi_i$  оснащены векторными нормами  $\|*\|^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . При этом в пространстве  $\Pi$ , соблюдая аксиомы, можно ввести норму  $\|*\|$  так, что для любого  $p \in \Pi$ :  $\|p\| = \max\{\|p_1\|^{(1)}, \|p_2\|^{(2)}\}$ . Здесь  $p = p_1 + p_2$ ,  $p_i \in \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Теперь определим способ нормировки линейного оператора  $D: \Pi \rightarrow \Pi$ . Для любого  $p \in \Pi$  имеем:  $Dp = D_1p + D_2p$ ,  $D_i p \in \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ , то есть  $D = D_1 \oplus D_2$ . Определим норму линейного оператора  $\|D\| = \max\{\|D_1\|^{(1)}, \|D_2\|^{(2)}\}$ , где  $\|*\|^{(i)}$  – операторные нормы, индуцированные соответствующими векторными нормами в  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Нетрудно проверить, что все аксиомы нормы, включая и кольцевое свойство, соблюдаются. Кроме того, очевидно, что введенная норма линейного оператора согласована с векторной нормой.

Допустим, при исследовании системы (1) представляет интерес некоторое разбиение  $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ , при котором  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $x^{(i)} \in \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ .

**Определение.** Нулевое решение системы (1) устойчиво по  $x^{(1)}$ , если для любых малых  $\mu: |\mu| < \delta$  и  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для всех  $a: \|a\| < \delta$  и  $m \in \mathbb{N}$  справедлива оценка  $\|x^{(1)}(m\omega, a, \mu)\|^{(1)} < \varepsilon$ . Если к

тому же  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|x^{(1)}(m\omega, a, \mu)\|^{(1)} = 0$ , то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по  $x^{(1)}$ .

Заметим, что данное определение, сформулированное в терминах степеней оператора монодромии, для периодической по  $t$  системы вида (1) равносильно определению устойчивости в терминах ляпуновских возмущений [4].

Так как система (1) близка к линейной, то существует такое число  $\delta_0 > 0$ , что любое решение  $x(t, a, \mu)$  системы определено для всех  $t \in [0, \omega]$ , если  $\|a\| < \delta_0$  и  $|\mu| < \delta_0$ . Установим локальную структуру правого оператора монодромии  $Ua : a \rightarrow x(\omega, a, \mu)$ .

Для решения системы (1) имеет место равенство

$$x(t, a, \mu) = X(t)a + y(t, a, \mu) = X(t)a + y_1(t, a, \mu) + y_2(t, a, \mu),$$

в котором  $X(t)$  – фундаментальная матрица системы  $\dot{x} = A(t)x$ ,

$$\begin{aligned} X(0) = E, \quad y(t, a, \mu) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) d\tau, \quad y_1(t, a, \mu) = \\ &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f(\tau, X(\tau)a, \mu) d\tau, \quad y_2(t, a, \mu) = y(t, a, \mu) - y_1(t, a, \mu). \end{aligned}$$

В силу единственности решения с данным начальным значением верно равенство  $x(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$ . Поэтому справедливо тождество

$$y'_a(t, 0_n, 0_m) = X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, x(\tau, 0_n, 0_m), 0_m) x'_a(\tau, 0_n, 0_m) d\tau \equiv 0_{nm}.$$

По формуле Лагранжа

$$\begin{aligned} y_2(t, a, \mu) &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) (f(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu) - f(\tau, X(\tau)a, \mu)) d\tau = \\ &= X(t) \int_0^t X^{-1}(\tau) f'_x(\tau, X(\tau)a + q(\tau, a, \mu)y(\tau, a, \mu), \mu) y(\tau, a, \mu) d\tau, \end{aligned}$$

где  $q(\tau, a, \mu) \in (0, 1)$  – некоторая величина. Поэтому выполняется условие

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|y_2(t, \alpha a, \alpha \mu)\|}{\|y_1(t, \alpha a, \alpha \mu)\|} \equiv 0.$$

Допустим, матрица монодромии  $X = X(\omega)$  обладает свойством  $X = X_1 + X_2$ ,  $X_1 a \equiv X_1 a^{(1)}$ . Итак, выделив первое приближение функции  $y_1(\omega, a, \mu)$ , будем предполагать, что для вектора  $x(\omega, a, \mu)$  разбиение в прямую сумму обладает свойствами:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(\omega, a, \mu) &= [X_1 + F_1(a) + G_1(a, \mu)]a^{(1)}, \\ x^{(2)}(\omega, a, \mu) &= [X_2 + F_2(a) + G_2(a, \mu)]a, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a = a^{(1)} + a^{(2)}$ ;  $F_i(a)$  – матрица, удовлетворяющая условию  $F_i(\alpha a) \equiv \alpha^{k_i} F_i(a)$ ,  $k_i > 1$ , причем для всех малых по норме  $a$  справедливы оценки

$$\|X_i + F_i(a)\|^{(i)} \leq 1 - \|a\|^{k_i} b_i, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2; \quad (3)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k_1} \|G_1(\alpha a, \mu)\|^{(1)} \equiv 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k_2} \|G_2(\alpha a, 0)\|^{(2)} \equiv 0.$$

**Теорема.** Если выполняются условия (3), то нулевое решение системы (1)–(2) асимптотически устойчиво по  $x^{(1)}$ .

**Доказательство.** В силу условий (2) и (3) при  $\|a\| < \delta_0$  и  $|\mu| < \delta_0$  без ограничения общности рассуждений можно предполагать, что справедливы оценки

$$\|X_i + F_i(a) + G_i(a, \mu)\|^{(i)} < 2, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Допустим,  $\mu = 0$ . Из условий (2) и (3) при некотором  $\delta_1 \in (0, \delta_0]$  получим оценки  $\|X_i + F_i(a) + G_i(a, 0)\|^{(i)} \leq (1 - \|a\|^{k_i} b_i) + \|a\|^{k_i} b_i / 2$ ,  $i = 1, 2$ , в которых  $\|a\| < \delta_1$ . Тогда имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \|x^{(1)}(\omega, a, 0)\|^{(1)} &\leq (1 - \|a\|^{k_1} b_1 / 2) \|a^{(1)}\|^{(1)}, \\ \|x^{(2)}(\omega, a, 0)\|^{(2)} &\leq (1 - \|a\|^{k_2} b_2 / 2) \|a\|. \end{aligned} \quad (5)$$

По определению нормы  $\|a^{(1)}\|^{(1)} \leq \|a\|$ . Итак,

$$\|x(\omega, a, 0)\| \leq (1 - \|a\|^k b / 2) \|a\| \quad (6)$$

при  $\|a\| < \delta_1$ ,  $k = \max\{k_1, k_2\}$ ,  $b = \min\{b_1, b_2\}$ .

Из непрерывности правой части системы (1) по параметру следует непрерывность оператора монодромии по параметру. Поэтому в силу оценки (6) существует такое  $\Delta \in (0, \delta_0]$ , что при условиях  $\delta_1 / 2 \leq \|a\| < \delta_1$  и  $|\mu| < \Delta$  справедлива оценка

$$\|x(\omega, a, \mu)\| \leq (1 - \|a\|^{k_1} b_1 / 4) \|a\| < \|a\| < \delta_1. \quad (7)$$

Из неравенства (4) при  $\|a\| < \delta_1 / 2$  и  $|\mu| < \Delta$  следует неравенство

$$\|x(\omega, a, \mu)\| < \delta_1. \quad (8)$$

Допустим,  $\|x(m\omega, a, \mu)\| < \delta_1$  при некотором  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|\mu| < \Delta$ . Тогда по групповому свойству периодической динамической системы в силу оценок (7) и (8)  $\|x((m+1)\omega, a, \mu)\| = \|x(\omega, x(m\omega, a, \mu), \mu)\| < \delta_1$ . Значит, по индукции для любого  $m \in \mathbb{N}$  при  $|\mu| < \Delta$  и  $\|a\| < \delta_1$  справедлива оценка

$$\|x(m\omega, a, \mu)\| < \delta_1. \quad (9)$$

То есть определена и ограничена любая последовательность  $(a(m))$ :  $a(m) = x(m\omega, a, \mu)$ ,  $a(0) = a$ .

Из первого неравенства (5) при некотором  $\Delta_1 \in (0, \Delta]$  следует, что

$$\|x^{(1)}(\omega, a, \mu)\|^{(1)} \leq (1 - \|a\|^{k_1} b_1 / 4) \|a^{(1)}\|^{(1)} \text{ при } \|a\| < \delta_1, |\mu| < \Delta_1.$$

Тогда с учетом оценки (9) по индукции при произвольно выбранном  $a$ :  $\|a\| < \delta_1$  выполняется соотношение

$$\|a^{(1)}(m+1)\|^{(1)} < (1 - \|a\|^{k_1} b_1 / 4) \|a^{(1)}(m)\|^{(1)}. \quad (10)$$

Теперь произвольно зафиксируем  $\mu$ :  $|\mu| < \Delta_1$  и  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ . Тогда при любых  $a$ :  $\|a\| < \delta$  и  $m \in \mathbb{N}$  в силу (10) справедливо неравенство  $\|a^{(1)}(m)\|^{(1)} < \|a^{(1)}(0)\|^{(1)} \leq \|a\| < \delta \leq \varepsilon$ . Значит, по данному

выше определению нулевое решение системы (1)–(2) устойчиво по  $x^{(1)}$ . Более того, из рекуррентного соотношения (10) при тех же  $\mu$  и  $a$  следует,

что  $\|a^{(1)}(m)\|^{(1)} < (1 - \|a\|^{k_1} b_1 / 4)^m \|a^{(1)}(0)\|^{(1)}$ . Переходя к пределу при

$m \rightarrow +\infty$  в последнем неравенстве, получим асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1)–(2) по  $x^{(1)}$ .

Теорема доказана.



В условиях данной теоремы из оценки (6) следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (11) при  $\mu = 0$ . То есть с точки зрения  $\mu$ -устойчивости имеет место не критический случай [3, 4]. Факт  $\mu$ -устойчивости следует из оценки (9). При этом нулевое решение, как показано далее, может быть неустойчиво по Ляпунову.

**Пример.** Рассмотрим автономную систему вида (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1^2 x_2 x_1, \\ \dot{x}_2 = (0,05x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2) + \mu(-2x_1 + 3x_2). \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, данная система имеет инвариантную прямую (частичное положение равновесия)  $x_1 = 0$ . Ясно, что при условии ограниченности  $x_2 = x_2(t)$  в силу первого уравнения системы (11) прямая  $x_1 = 0$  асимптотически устойчива. В то же время из второго уравнения следует, что при  $\mu > 0$  нулевое решение системы (11) неустойчиво.

Теперь получим аналогичный вывод другим способом. Рассмотрим разбиение фазовой переменной

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Выясним, устойчиво ли нулевое решение системы (11) по  $x^{(1)}$ ?

Выберем  $\omega = 1$ . Матрица монодромии для системы (11) обладает свойством

$$X = X_1 + X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первое приближение  $F(a)a$  правого оператора монодромии при  $\mu = 0$  имеет разложение

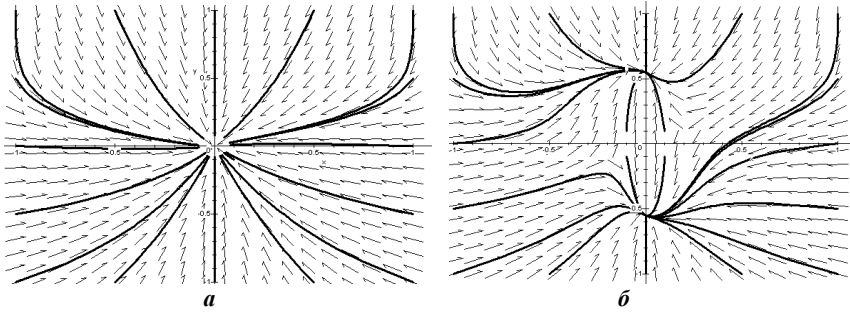
$$F(a) = F_1(a) + F_2(a) = \begin{pmatrix} -(a_1^2 + a_2^2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0,05(a_1^2 + a_2^2) & -(a_1^2 + a_2^2) \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $F_1(a)$ ,  $F_2(a)$  из этого разложения удовлетворяют оценкам типа

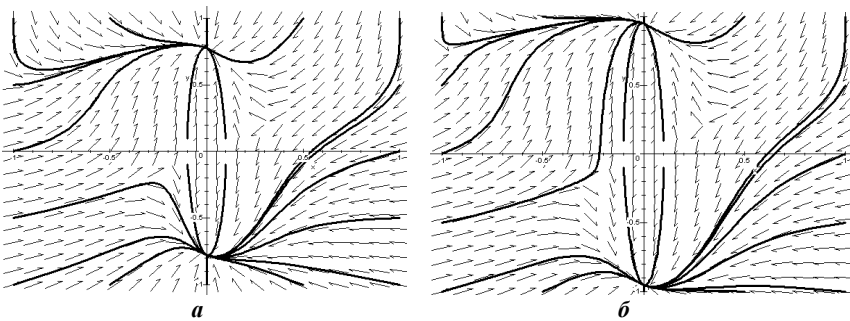
(3) с евклидовыми нормами  $\|*\|^{(i)} = \|*\|_2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k_1 = k_2 = 2$ . Соблюдают-ся и условия  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k_1} \|G_1(\alpha a, \mu)\|^{(1)} \equiv 0$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k_2} \|G_2(\alpha a, 0)\|^{(2)} \equiv 0$ .

Итак, по установленной выше теореме нулевое решение системы (11) асимптотически устойчиво по  $x^{(1)}$ .

Этот вывод иллюстрируется картиной расположения фазовых траекторий системы (11) (рис. 1 и 2), построенной в пакете Maple.



**Рис. 1. Траектории системы (11)  
при различных значениях параметра: а –  $\mu = 0$  ; б –  $\mu = 0,1$**



**Рис. 2. Траектории системы (11)  
при различных значениях параметра: а –  $\mu = 0,2$  ; б –  $\mu = 0,3$**

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румянцев В.В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер. М.: Наука, 1987. 253 с.
2. Воротников В.И. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем / В.И. Воротников, В.В. Румянцев. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
3. Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986. 190 с.
4. Абрамов В.В. Устойчивость нулевого решения периодической системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Журнал СВМО. 2010. Т. 12, № 4. С. 49–54.
5. Абрамов В.В. Признаки устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 3–6.

УДК 515.177

**М. А. Башкин**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П. А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

**ОДНОРОДНОЕ НЕРАСЩЕПИМОЕ  
СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ С РЕТРАКТОМ  $\mathbb{C}P_{7,5,2,2}^{14}$**

*Доказано, что существует с точностью до изоморфизма одно однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом  $\mathbb{C}P_{7,5,2,2}^{14}$ .*

**Ключевые слова:** однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, касательный пучок

**M. A. Bashkin**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: mbashkin@rsatu.ru

**NON-SPLIT HOMOGENEOUS SUPERMANIFOLD  
WITH RETRACT  $\mathbb{C}P_{7,5,2,2}^{14}$**

*It's proved that there exist, up to isomorphism, only one homogeneous non-split supermanifold with retract  $\mathbb{C}P_{7,5,2,2}^{14}$ .*

**Keywords:** non-split homogeneous supermanifold, retract, tangent sheaf

В работе продолжена классификация однородных нерасщепимых супермногообразий [1-3], связанных с комплексной проективной прямой. Комплексное супермногообразие размерности  $m|n$  это  $\mathbb{Z}_2$ -градуированное пространство  $(M, O)$ , где  $M$  – комплексное многообразие, а  $O$  – пучок коммутативных супералгебр на  $M$ , локально изоморфное паре  $(U, \Lambda_{F_m}(\xi_1, \dots, \xi_n))$ , где  $U$  – область в  $\mathbb{C}^m$ ,  $F_m$  – пучок голоморфных функций в  $\mathbb{C}^m$ . Если рассмотреть любое голоморфное векторное расслоение  $E$  над комплексным многообразием  $(M, F)$ , то оно определяет комплексное супермногообразие  $(M, \Lambda_F E)$ , где  $E$  – пучок голоморфных сечений

расслоения  $\mathbf{E}$ . Супермногообразие называется однородным, если супералгебра голоморфных векторных полей транзитивна на нем, то есть порождает касательное суперпространство в каждой его точке.

В работе [4] показано, что любое голоморфное векторное расслоение  $\mathbf{E}$  ранга  $n$  над  $M = \mathbf{CP}^1$ , определяющее однородное расщепимое супермногообразие, имеет вид  $\bigoplus_{j=1}^n L_{-k_j}$ , где все  $k_j \geq 0$ , а  $L_k$  – голоморфное линейное расслоение степени  $k$ .

Нашей целью будет построение однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с однородным расщепимым супермногообразием  $\mathbf{CP}_{7,5,2,2}^{14}$ , определяемым голоморфным векторным расслоением  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1$  ранга 4 вида  $\mathbf{E} = L_{-7} \oplus L_{-5} \oplus 2L_{-2}$ . Рассмотрим стандартное покрытие  $\mathbf{CP}^1$  двумя аффинными картами  $U_0$  и  $U_1$  с локальными координатами  $x$  и  $y = 1/x$  соответственно. Тогда в  $U_0 \cap U_1$  имеем

$$y = x^{-1}, \quad \eta_1 = x^{-7} \xi_1, \quad \eta_2 = x^{-5} \xi_2, \quad \eta_3 = x^{-2} \xi_3, \quad \eta_4 = x^{-2} \xi_4,$$

где  $\xi_i$  и  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – базисные сечения расслоения  $\mathbf{E}$  над  $U_0$  и  $U_1$  соответственно.

Пусть  $T_{\text{gr}}$  – градуированный касательный пучок супермногообразия  $\mathbf{CP}_{7,5,2,2}^{14}$ , а  $\nu(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O}_{\text{gr}})$  супералгебра Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим точную последовательность [4]

$$0 \rightarrow \text{End } \mathbf{E} \rightarrow \nu(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O}_{\text{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} sl_2(\mathbf{C}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Подалгебра  $\alpha \subset \nu(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O}_{\text{gr}})_0$  расщепляет эту последовательность, если  $\beta$  изоморфно отображает ее на  $sl_2(\mathbf{C})$  или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму:  $\nu(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O}_{\text{gr}})_0 = \text{End } \mathbf{E} \oplus \alpha$ . В [4] показано, что супермногообразии с ретрактом  $(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O}_{\text{gr}})$  четно-однородно тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра  $\alpha$ , расщепляющая последовательность (1). Говорят, что супермногообразии  $(\mathbf{CP}^1, \mathbf{O})$  является четно-однородным относительно  $\alpha$ . В нашем случае с точностью до автоморфизма из  $\text{Aut } \mathbf{E}$  существуют две расщепляющие подалгебры  $\alpha_i \cong sl_2(\mathbf{C})$ ,  $i = 1, 2$ , со следующими базисами (см. [4]):

$$\alpha_1: \quad e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - \nabla, \quad f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - x \nabla;$$

$$\alpha_2: \quad e = \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x},$$

$$h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 7\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 5\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$f = \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2 \frac{\partial}{\partial x} - x\nabla.$$

Здесь

$$\nabla = 7\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 5\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2 \left( \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4} \right).$$

Рассмотрим подпучок  $\text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} = \exp((T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4)$  пучка  $\text{Aut O}_{\text{gr}}$ . Согласно теореме Грина (P. Green), множество супермногообразий с заданным ретрактом  $(M, \text{O}_{\text{gr}})$  изоморфно множеству орбит группы  $\text{Aut}(E)$  на множестве  $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$ . Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии  $U = \{U_0, U_1\}$ .

**Предложение 1 ([3]).** Пусть  $n < 6$  и  $H^0(M, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$ . Пусть подпространства  $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{\text{gr}})_2)$  ( $p = 1, 2$ ) такие, что каждый класс когомологий из  $H^1(M, (T_{\text{gr}})_2)$  содержит ровно по одному коциклу из  $Q_{2p}$  ( $p = 1, 2$ ). Тогда любой класс когомологий из  $H^1(M, \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}})$  представляется единственным коциклом вида  $z = \exp(u^2 + u^4)$ , где  $u^2 \in Q_2, u^4 \in Q_4$ .

Будем говорить, что супермногообразие  $(M, O)$  задается коциклом  $u^2 + u^4$ , если оно соответствует коциклу  $z = \exp(u^2 + u^4)$ .

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [5], можно доказать, что справедливо равенство  $H^0(\mathbb{C}P^1, (T_{\text{gr}})_2) = \{0\}$ , и вычислить базис пространства  $H^1(\mathbb{C}P^1, (T_{\text{gr}})_q)$ ,  $q = 2, 4$ .

Обозначим через  $H^1(\mathbb{C}P^1, T_{\text{gr}})^\alpha$  множество  $\alpha$ -инвариантных классов когомологий.

**Предложение 2.** Базис пространства  $H^1(\mathbb{C}P^1, (T_{\text{gr}})_2)^{\alpha_i}$ , где  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) – расщепляющие подалгебры, состоит из следующих коциклов:

$$1) i = 1: \quad x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 3x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2x^{-2} \xi_3 \xi_4 \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1};$$

$$2) i = 2: \quad x^{-1} \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

**Предложение 3.** Для любой расщепляющей подалгебры  $\alpha$  справедливо равенство  $H^1(\mathbb{C}P^1, (T_{\text{gr}})_4)^\alpha = \{0\}$ .

Пусть  $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}\text{O}_{\text{gr}} \rightarrow (T_{\text{gr}})_2$  – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому росту автоморфизма  $\alpha$  2-компоненту элемента  $\log \alpha$  в  $(T_{\text{gr}})_2 \oplus (T_{\text{gr}})_4$ . Из предложений 1 и 3 следует

**Предложение 4.** Если  $\alpha$  – подалгебра, расщепляющая последовательность (1), а  $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}\mathcal{O}_{\text{gr}})^\alpha$  – множество классов, определяющих четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия, то  $\lambda_2^*$  биективно отображает это множество на  $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{\text{gr}})_2)^\alpha$ .

Из этого предложения получаем, что четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия можно представить коциклами вида  $u^2 + u^4$ , где класс  $[u^2]$   $\alpha$ -инвариантен, а класс  $[u^4]$  может быть определен с помощью предложения 5.1 из [6]. Заметим, что  $\alpha$ -инвариантные классы  $[u^2]$  описаны ранее в предложении 2. Проверив, что для них  $[u^2; u^2] = 0$ , из предложения 5.1 работы [6] получаем, что класс  $[u^4]$  также должен быть  $\alpha$ -инвариантным. Из предложение 3 следует

**Предложение 5.** Для любой расщепляющей подалгебры  $\alpha$  четно-однородные относительно  $\alpha$  супермногообразия задаются коциклами, определенными в предложении 2.

Выясним, когда полученные четно-однородные супермногообразия с ретрактом  $\mathbf{CP}_{7,5,2,2}^{14}$  являются однородными. В [1] доказано

**Предложение 6.** Пусть выполнены условия предложения 1, и пусть супермногообразие  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$  является четно-однородным относительно  $\alpha_i$ . В случае  $i = 1$  супермногообразия  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$  однородно тогда и только тогда, когда векторные поля  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  поднимаются на  $(\mathbf{CP}^1, \mathcal{O})$ ,

а в случае  $i = 2$  – когда этим свойством обладают векторные поля  $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Сформулируем окончательный результат.

**Теорема.** Существует единственное однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом  $\mathbf{CP}_{7,5,2,2}^{14}$ , представимое коциклом

$$x^{-1} \xi_2 \xi_3 \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим коциклы, указанные в предложении 2, и применим к ним предложение 6. Используя критерий подъема из [6] (предложение 5.1), в каждом случае супералгебры  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) получаем, что нерасщепимые однородные супермногообразия задаются ненулевым коциклом, приведенным в формулировке теоремы.  $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башкин М.А.* Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом  $СР_{6,4,2,2}^{14}$  // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2016. С. 13–19.
2. *Башкин М.А.* Об одном семействе Кураниси // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 15. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2020. С. 9–13.
3. *Башкин М.А.* Одно семейство однородных нерасщепимых супермногообразий над сферой Римана // Вестник РГТУ им. П.А. Соловьева. 2015. №3 (34). С. 125–130.
4. *Bunegina V.A.* Homogeneous supermanifolds associated with the complex projective line / V.A. Bunegina, A.L. Onishchik // J. Math. Sci. 1996. V. 82. P. 3503–3527.
5. *Вишнякова Е.Г.* Четно-однородные комплексные супермногообразия размерности  $1|3$  на сфере Римана // Современные проблемы математики и информатики: сб. науч. тр. молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 7. Ярославль: ЯрГУ, 2005. С. 22–30.
6. *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

УДК 512.5

**Ю. И. Большаков**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
Россия, г. Ярославль, e-mail: bolshakovyi@mail.ru

## ОБ ОДНОМ ИДЕАЛЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОЛУГРУППЫ $\mathbb{R}^{n \times n}$

*Рассматриваются все решения одного специального матричного уравнения, которые образуют левый идеал мультипликативной полугруппы всех вещественных матриц  $n$ -го порядка.*

**Ключевые слова:** мультипликативная полугруппа, левый идеал, нуль-многообразие

**Y. I. Bolshakov**

P.G. Demidov Yaroslavl State University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: bolshakovyi@mail.ru

## ABOUT ONE IDEAL OF THE MULTIPLICATIVE SEMI-GROUPS $\mathbb{R}^{n \times n}$

*The paper examines all solutions of one special matrix equation that form left ideal of the multiplicative semi-group of all real  $n$ -order matrices.*

**Keywords:** multiplicative semi-group, left ideal, null-manifold

В заметке речь идёт об описании идеала  $x_0 \subset x$ , где  $x$  – мультипликативная полугруппа [1, с. 32], совпадающая с  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , но с наличием одной операции традиционного матричного умножения её элементов из множества  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Поэлементно множества  $x$  и  $\mathbb{R}^{n \times n}$  совпадают, но в  $x$  присутствует одна операция матричного умножения, в  $\mathbb{R}^{n \times n}$  их две – сложение и умножение матриц. Множество же  $x_0 \subset x$ , определено равенством

$$x_0 = \{X \in x \mid XX^H = 0\}, \quad (1)$$

где  $X^H = H^{-1}X'H$ ,  $H' = H$ ,  $\det H \neq 0$ .

Легко проверить, что  $x_0$  – левый идеал в  $x$ , то есть для любой матрицы  $Y \in x$  и любой матрицы  $X_0 \in x_0$  матрица  $X = YX_0 \in x_0$ .

В книге [2, с. 382] в задаче 1 главы 11 применительно к нашей ситуации утверждается, что всякий левый идеал алгебры  $\mathbb{R}^{n \times n}$  есть совокупность всех операторов, нуль-многообразие которых содержит некоторое подпространство  $L \subset \mathbb{R}^n$ .





$$X_1 = XJ_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1m} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} & \dots & x_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} m \\ \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \right] \\ 2m \quad p-m \end{array} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|c} x_{11} & \dots & x_{1m} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ x_{n1} & \dots & x_{nm} & \end{array} \right] \\ m \quad n-m \end{array},$$

$$X_2 = XJ_2 = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc|c} x_{1,m+1} & \dots & x_{1,2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n,m+1} & & x_{n,2m} \end{array} \right] \\ m \quad m \quad n-2m \end{array}.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \text{Ker } X_1 &\supset \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle, \dim \text{Ker } X_1 \geq n - m = p, \dim \text{Im } X_1 \leq n - p \leq m, \\ \text{Ker } X_2 &\supset \langle e_1, \dots, e_m, e_{2m+1}, \dots, e_n \rangle, \dim \text{Ker } X_2 = m + n - 2m = n - m = p. \end{aligned}$$

С другой стороны,  $X_i X_i^H = 0, i = 1, 2$ ; кроме того,  $X_1$  и  $X_2$  - левые идеалы  $x$  и  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Для нахождения левого идеала  $x_0$  мультипликативной полу-группы  $x$  (т.е. для нахождения всех решений уравнения  $X_0 X_0^H = 0$ ) нужно, согласно [4, с. 175] уметь явно описать все  $H$ -унитарные матрицы  $U$  (то есть такие матрицы, для которых имеет место равенство  $UU^H = I$ ). Тогда  $X_0 = X_1 U$ , где  $U$  пробегает всю группу  $H$ -унитарных матриц. Это описание технически чрезвычайно сложная задача. Подпространство  $L$  о котором идет речь в теореме [2, с. 382], лежит в пересечении ядер выше-приведенных матриц  $X_1$  и  $X_2$ , а именно,  $\langle e_{2m+1}, \dots, e_n \rangle$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч 1 : учебное пособие для пед. ин-тов. Минск: Высш. шк., 1986. 272 с.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука. 1969. 432 с.
3. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч 2 : учебное пособие для пед. ин-тов. Минск: Выш. шк., 1987. 256 с.
4. Bolshakov Y.I. Unitary Equivalence in an Indefinite Scalar Product: An Analogue of Singular – Value Decomposition / Y.I. Bolshakov and B. Reichstein // Linear algebra and its applications. 1995. V. 222. P. 155–226.

УДК 517.925.42

**Е. Ю. Лискина**

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина  
Россия, г. Рязань, e-mail: [katelis@yandex.ru](mailto:katelis@yandex.ru)

**О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ  
СЛУЧАЕ У ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ**

*В статье исследуется нелинейная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, у которой матрица системы линейного приближения имеет пару чисто мнимых собственных значений, а нелинейная часть является однородной формой четной степени по совокупности фазовых переменных.*

**Ключевые слова:** автономная динамическая система, критический случай, сложный фокус, центр, проблема различения центра и фокуса

**E. Ju. Liskina**

S.A. Yesenin Ryazan State University  
Russia, Ryazan, e-mail: [katelis@yandex.ru](mailto:katelis@yandex.ru)

**ON SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE EXISTENCE  
OF PERIODIC SOLUTIONS IN THE CRITICAL CASE  
OF A DYNAMICAL SYSTEM  
WITH AN EVEN DEGREE OF NONLINEARITY**

*The article investigates a nonlinear autonomous system of ordinary differential equations of the second order, in which the matrix of the linear approximation system has a pair of imaginary proper values, and the nonlinear part is a homogeneous form of even degree in the aggregate of phase variables.*

**Keywords:** autonomous dynamic system, critical case, complex focus, center, the problem of distinguishing center and focus

**Введение.** Исследования классической проблемы различения центра и фокуса посвящено большое количество работ [1–9]. Аналитическая разрешимость проблемы доказана в [5]. Тем не менее с точки зрения приложений и компьютерного моделирования различных процессов весьма интересны коэффициентные условия различения центра и фокуса. На на-

стоящий момент такие условия получены для систем, имеющих кубическую нелинейность [2, 3, 6], либо нелинейность нечетной степени [7]. Также имеются достаточные условия для различения центра и фокуса для систем дифференциальных уравнений с правыми частями специального вида.

В данной работе для нахождения условий существования ненулевых периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия используется метод введения вспомогательного параметра [10, 11]. Получены достаточные коэффициентные условия существования семейства ненулевых  $T$ -периодических решений в окрестности нулевого состояния равновесия для автономной системы в критическом случае при условии, что нелинейная часть системы содержит формы только четных степеней по совокупности фазовых переменных.

### 1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (1)$$

в которой  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -a \end{pmatrix}$  – матрица, имеющая пару собственных

значений  $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$  ( $\omega = \sqrt{bc - a^2}$ ,  $a^2 < bc$ ,  $bc > 0$ , [10]);  $f(x)$  – вектор-функция, компонентами которой являются суммы форм четного порядка  $k$  не ниже второго относительно компонент вектора  $x$ ,  $\|x\| = \max_{i=1,2} \{|x_i|\}$ .

Система (1) на множестве  $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq \varepsilon_0\}$  удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Требуется получить условия существования окрестности состояния равновесия  $x \equiv 0$ , через каждую точку которой проходит ненулевое периодическое решение системы (1).

### 2. Предварительные результаты. Выполним замену переменных

$x = (E + M)\bar{x}$ , где  $M = (m_{ij}(\mu))_{i,j=1}^2$  – матрица параметров, функции  $m_{ij}(\mu)$

непрерывны по компонентам вектора  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|\mu\| = \max_{i=1,m} \{|\mu_i|\}$ ,  $M(0) = 0_{22}$ ;

$E$  – единичная  $2 \times 2$ -матрица. Пусть норма матрицы  $\|M\| = \max_{i=1,2} \{|m_{i1}| + |m_{i2}|\}$ ,

тогда матричный ряд  $(E + M)^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i M^i$  равномерно сходится на

множестве  $W(\varepsilon_1) = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \|\mu\| \leq \varepsilon_1 \Rightarrow \|M\| < 1\}$ .

С учетом сказанного при сохранении прежних обозначений для переменных  $t$  и  $x$  систему (1) можно переписать следующим образом:

$$\dot{x} = (A + (AM - MA))x + \left( \sum_{i=2}^{+\infty} (-1)^i (M^i A - M^{i-1} AM) \right) x + \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i M^i f((E + M)x). \quad (2)$$

Пусть  $U(\delta) = \{\alpha \in \mathbb{R}^2 : \|\alpha\| \leq \delta\}$ ,  $\|\alpha\| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$ . Состояние равновесия  $x \equiv 0$  является решением системы (2). Для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta_0 \in (0; \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\})$ , что для любого вектора  $\alpha \in U(\delta_0)$ , любого вектора  $\mu \in W(\delta_0)$  решение  $x(t, \alpha, \mu)$  системы (2), удовлетворяющее начальному условию  $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$ , определено и непрерывно на промежутке  $[0, T]$  ( $T = 2\pi/\omega$ ), и при любых  $t \in [0, T]$  удовлетворяет неравенству  $\|x(t, \alpha, \mu)\| < \varepsilon$ . Система (2) на множестве  $[0, T] \times U(\delta_0) \times W(\delta_0)$  удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра.

**Определение.** Решение  $x(t, \alpha, \mu)$  системы (2), удовлетворяющее начальному условию  $x(0, \alpha, \mu) = \alpha$ , будем называть *малым  $T$ -периодическим решением*, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существуют векторы  $\bar{\alpha} \in U(\delta_0)$ ,  $\bar{\mu} \in W(\delta_0)$ , такие, что  $x(T, \bar{\alpha}, \bar{\mu}) - \bar{\alpha} = 0_2$ , и при всех  $t \in [0, T]$  выполнено неравенство  $\|x(t, \bar{\alpha}, \bar{\mu})\| < \varepsilon$ .

В работах [10, 11] доказано, что решения  $x(t, \alpha)$  и  $x(t, \alpha, \mu)$  систем (1) и (2) соответственно, удовлетворяющие начальному условию  $x(0, \alpha) = x(0, \alpha, \mu) = \alpha$  совпадают при всех  $t \in [0, T]$ , а условие существования малого ненулевого периодического решения системы (2) в случае, когда  $f(x)$  – вектор-функция, содержащая суммы форм четного порядка  $k$  относительно компонент вектора  $x$ , имеет вид

$$h(\mu)E\alpha + \psi(\alpha, \mu) = 0_2, \quad (3)$$

в котором

$$h(\mu) = 4a^2 m_{12}(\mu) m_{21}(\mu) - bc(m_{11}(\mu) - m_{22}(\mu))^2 - 2a(m_{11}(\mu) - m_{22}(\mu))(cm_{12}(\mu) - bm_{21}(\mu)) - (cm_{12}(\mu) + bm_{21}(\mu))^2;$$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \mu) = & -\frac{\omega^3}{\pi} A^{-1} \int_0^T X^{-1}(t) \sum_{i=3}^{+\infty} (-1)^i (M^i A - M^{i-1} A M) X(t) \alpha dt - \\ & -\frac{\omega^3}{\pi} A^{-1} \int_0^T X^{-1}(t) \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i M^i \bar{F}(X(t)\alpha) X(t) \alpha dt + o(\rho^{k+1}); \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho^{k+1})}{\rho^{k+1}} = & 0, \quad \rho = \max\{\|\alpha\|, \|\mu\|\}, \end{aligned}$$

где  $\bar{F}(X(t)\alpha)$  –  $2 \times 2$ -матрица, элементами которой являются суммы форм порядка не ниже  $k-1$  относительно компонент вектора  $X(t)\alpha$ .

**3. Основной результат.** Построим компоненты  $m_{ij}(\mu)$  ( $i, j = \overline{1; 2}$ ) матрицы  $M$  в виде форм порядка  $l$  относительно компонент вектора  $\mu \in \mathbb{R}^m$ ,  $l \in \mathbb{R}$ ,  $l \leq k$ ,  $\mu \in W(\delta_0)$ . Тогда имеет место представление

$$h(\mu)E\alpha = s_{l+1}(\alpha, \mu), \quad (4)$$

где вектор-функция  $s_{l+1}(\alpha, \mu)$  содержит формы порядка  $l+1$  относительно компонент вектора  $(\alpha, \mu)$ . В силу вида вектор-формы  $s_{l+1}(\alpha, \mu)$  всегда существует размерность  $m \in \mathbb{N}$  и вектор  $\mu_0 \in \mathbb{R}^m$  такие, что  $s_{l+1}(\alpha, \mu_0) = 0_2$ . Тогда для указанной размерности  $m$  и вектора  $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m}$  справедливо равенство  $\text{rank } Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0) \leq 1$ , где  $Ds_{l+1}(\alpha, \mu_0)$  – матрица Якоби вектор-формы  $s_{l+1}(\alpha, \mu)$ , вычисленная для вектора  $(\alpha, \mu_0) \in \mathbb{R}^{2+m}$ . Введем обозначения  $\zeta_0 = \rho^{-1}(\alpha, \mu_0)$ ,  $\|\zeta_0\| = 1$ ,  $O(\rho) = \rho^{-(l+1)}o(\rho^{l+1})$ ,  $\lim_{\rho \rightarrow 0} O(\rho) = 0$ . Тогда  $\text{rank } D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \leq 1$  и с учетом (4) условие (3) существования ненулевого  $T$ -периодического решения системы (2) примет вид

$$\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) + O(\rho) = 0_2. \quad (5)$$

Допустим, что  $\text{rank } D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) = 1$ . Построим множество  $Z_0 = \{\zeta_0 \in \mathbb{R}^{2+m} : \rho\zeta_0 \in (U(\delta_0) \setminus \{0\}) \times W(\delta_0)\}$ . Тогда для любого фиксированного вектора  $\zeta_0 \in Z_0$ , разложив вектор-функцию  $\tilde{s}_{l+1}(\zeta)$  по формуле Тейлора по степеням  $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$  и учитывая, что  $\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) = 0$ , получим

$$\tilde{s}_{l+1}(\zeta) = D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)\Delta\zeta + \sum_{i=2}^{l+1} p_i(\zeta_0; \Delta\zeta), \quad (6)$$

где  $p_i(\zeta_0; \Delta\zeta)$  – непрерывная вектор-форма порядка  $i$  относительно  $\Delta\zeta$ ,  $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0$ ,  $\Delta\zeta = \rho^{-1}(\Delta\alpha, \Delta\mu_0)$ . С учетом (6) систему (5) приведем к виду

$$D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)\Delta\zeta + p_2(\zeta_0, \Delta\zeta) + o(\|\Delta\zeta\|^2) + O(\rho) = 0_2, \quad (7)$$

в котором  $\lim_{\|\Delta\zeta\| \rightarrow 0} \|\Delta\zeta\|^{-2} o(\|\Delta\zeta\|^2) = 0$ . Так как  $\text{rank } D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) = 1$ , то приведем матрицу  $D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)$  к ступенчатому виду. Для этого систему (7) умножим слева на неособенную матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta_{0\alpha_2} / \zeta_{0\alpha_1} & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью непосредственных вычислений получим

$$QD\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) = \begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Qp_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix},$$

где  $D_1\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)$  – первая строка матрицы  $D\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)$ ;

$$p_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ p_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix}; \quad \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) = p_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) - \frac{\zeta_{0\alpha_2}}{\zeta_{0\alpha_1}} p_{2(1)}(\zeta_0, \Delta\zeta);$$

$$\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) = Qo(\|\Delta\zeta\|^2), \quad \tilde{O}(\rho) = QO(\rho).$$

Следовательно, система (7) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)\Delta\zeta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{2(1)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \\ \tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \end{pmatrix} + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \quad (8)$$

Обозначим  $V_{\zeta_0}(\delta_1) = \{\Delta\zeta \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\Delta\zeta\| \leq \delta_1 \wedge (\zeta_0 + \Delta\zeta) \in Z_0\}$ .

**Теорема 1.** Если при любом  $\Delta\zeta \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$  выполнено неравенство  $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) \neq 0$ , то существует такое число  $\delta' \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$ , что для любого вектора  $(\alpha, \mu_0) \in (U(\delta') \setminus \{0\}) \times W(\delta')$  система (2) не имеет ненулевых  $T$ -периодических решений.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в [10].

Пусть существует вектор  $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$ , при котором выполнено равенство  $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta_0) = 0$ . Обозначим  $D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$  – матрицу Якоби вектор-функции  $Qp_2(\zeta_0, \Delta\zeta)$ , вычисленную при  $\Delta\zeta_0$ . Составим матрицу

$(QD\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \mid D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0))$  приписыванием к матрице  $QD\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0)$  столбцов матрицы  $D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$ . Определим множество

$$Z_1 = \left\{ \Delta\xi \in \mathbb{R}^{2+m} : \|\Delta\xi\| = \|\Delta\zeta - \Delta\zeta_0\| \leq \delta_1 \wedge \Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1) \right\}.$$

**Теорема 2.** Если для вектора  $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$ , удовлетворяющего условию  $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta_0) = 0$ ,  $\text{rank}(QD\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \mid D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)) = 2$ , то существует такое число  $\delta_2 \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$ , что на множестве  $Z_0 \oplus Z_1$  система (2) имеет семейство ненулевых  $T$ -периодических решений  $\bar{x}(t, \alpha, \mu_0)$ , удовлетворяющих начальным условиям  $\bar{x}(0, \alpha, \mu_0) = \alpha$ . Начальные значения  $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$  решений семейства определяются соотношениями  $(\alpha, \mu_0) = \rho(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi))$ ,  $(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \Delta\xi)) \in Z_0 \oplus Z_1$ .

**Доказательство.** Пусть существует вектор  $\Delta\zeta_0 \in V_{\zeta_0}(\delta_1)$ , удовлетворяющий условию  $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta_0) = 0$ . Разложим вектор-функцию  $Qp_2(\zeta_0, \Delta\zeta)$  в ряд Тейлора в окрестности  $\Delta\zeta_0$ . Тогда

$$Qp_2(\zeta_0, \Delta\zeta) = D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)\Delta\xi + \sum_{i=2}^j q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi), \quad (9)$$

где  $D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)$  – матрица Якоби вектор-функции  $Qp_2(\zeta_0, \Delta\zeta)$ , вычисленная при  $\Delta\zeta_0$ , удовлетворяющем условию  $\tilde{p}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta_0) = 0$ ;  $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$  – вектор-форма порядка  $i$  относительно  $\Delta\xi = \Delta\zeta - \Delta\zeta_0$ . Так как выполняется условие  $\text{rank}(QD\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \mid D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)) = 2$ , то справедливо представление

$$\begin{pmatrix} D_1\tilde{s}_{l+1}(\zeta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \Delta\zeta + D\tilde{p}_2(\zeta_0, \Delta\zeta_0)\Delta\xi = S_1\bar{w} + S_2\bar{\bar{w}}, \quad (10)$$

где  $S_1, S_2$  – матрицы размерностей  $2 \times 2$  и  $2 \times m$  соответственно; векторы  $\bar{w}$  и  $\bar{\bar{w}}$  имеют размерности 2 и  $m$  соответственно и выбраны так, чтобы  $\|\bar{w}\| \neq 0$  и  $\det S_1 \neq 0$ . Тогда в силу вида вектор-форм  $q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi)$  справедливо представление

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^j q_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \Delta\xi) &= \sum_{i=2}^j (\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) + \\ &+ \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}), \end{aligned} \quad (11)$$



в котором  $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w})$ ,  $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})$  – формы порядка  $i$  относительно компонент векторов  $\bar{w}$  и  $\bar{\bar{w}}$  соответственно;  $i = \overline{2}; j$ ;  $\tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})$  – сумма форм не ниже второго порядка по совокупности компонент векторов  $\bar{w}$  и  $\bar{\bar{w}}$ . Для всех  $i = \overline{2}; j$  справедливы равенства  $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$ ,  $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$ ,  $\lim_{\|\bar{w}\| \rightarrow 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0$  равномерно по  $\bar{w}$  на множестве  $\|\bar{w}\| \leq \delta_2$ ,  $\lim_{\|\bar{\bar{w}}\| \rightarrow 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0$  равномерно по  $\bar{\bar{w}}$  на множестве  $\|\bar{\bar{w}}\| \leq \delta_2$ , где  $\delta_2 \in (0; \min\{\delta_0, \delta_1\})$ . С учетом формул (9)–(11) система (8) примет вид

$$S_1\bar{w} + S_2\bar{\bar{w}} + \sum_{i=2}^j (\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) + \tilde{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) + \tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) + \tilde{O}(\rho) = 0_2. \quad (12)$$

Так как  $\det S_1 \neq 0$ , то при всех  $\bar{w}$ ,  $\bar{\bar{w}}$  и любом  $\rho \in (0; \delta_2)$  уравнение (12) определяет нелинейный непрерывный по  $\bar{w}$  оператор

$$\begin{aligned} H\bar{w} = & -S_1^{-1}S_2\bar{\bar{w}} - S_1^{-1} \sum_{i=2}^j (\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) + \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}})) - \\ & - S_1^{-1}\tilde{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) - S_1^{-1}\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2) - S_1^{-1}\tilde{O}(\rho). \end{aligned} \quad (13)$$

Так как для всех  $i = \overline{2}; j$  выполняются равенства  $\bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$ ,  $\bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, 0) = 0$ ,  $\lim_{\|\bar{w}\| \rightarrow 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0$  равномерно по  $\bar{w}$  на множестве  $\|\bar{w}\| \leq \delta_2$ ,  $\lim_{\|\bar{\bar{w}}\| \rightarrow 0} \tilde{q}(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}}) = 0$  равномерно по  $\bar{\bar{w}}$  на множестве  $\|\bar{\bar{w}}\| \leq \delta_2$ , а также из определения  $\tilde{o}(\|\Delta\zeta\|^2)$  и  $\tilde{O}(\rho)$  следует, что существуют числа  $\delta, \delta', \delta'' \in (0; \delta_2]$  такие, что при всех  $\|\bar{w}\| \leq \delta$ ,  $\|\bar{\bar{w}}\| < \delta$ ,  $\|\Delta\zeta\| < \delta'$ ,  $\rho \in (0; \delta'')$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|S_1^{-1}\| \|S_2\| \|\bar{\bar{w}}\| & < \frac{\delta}{6}, \quad \|S_1^{-1}\| \left\| \sum_{i=2}^j \bar{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}) \right\| < \frac{\delta}{6}, \\ \|S_1^{-1}\| \left\| \sum_{i=2}^j \bar{\bar{q}}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{\bar{w}}) \right\| & < \frac{\delta}{6}, \quad \|S_1^{-1}\| \|\tilde{q}_i(\zeta_0, \Delta\zeta_0, \bar{w}, \bar{\bar{w}})\| < \frac{\delta}{6}, \end{aligned}$$

$$\|S_1^{-1}\| \|\tilde{\sigma}(\|\Delta\zeta\|^2)\| < \frac{\delta}{6}, \|S_1^{-1}\| \|\tilde{O}(\rho)\| < \frac{\delta}{6},$$

из которых следует, что для любых фиксированных  $\|\overline{\overline{w}}\| < \delta$ ,  $\|\Delta\zeta\| < \delta'$ ,  $\rho \in (0; \delta'')$  оператор  $N$  непрерывен по  $\overline{\overline{w}}$  и отображает множество  $\overline{V}(\delta) = \{\overline{w} \in \mathbb{R}^2 : \|\overline{w}\| \leq \delta\}$  в себя. По теореме Брауэра существует вектор  $\overline{\overline{w}}^* \in \overline{V}(\delta)$  такой, что  $N\overline{\overline{w}}^* = \overline{\overline{w}}^*$ . Зафиксируем произвольные  $\overline{\overline{w}}^*$ ,  $\Delta\zeta^*$ ,  $\rho^*$  так, чтобы  $\|\overline{\overline{w}}^*\| < \delta$ ,  $\|\Delta\zeta^*\| < \delta'$ ,  $\rho^* \in (0; \delta'')$ . Из компонент векторов  $\overline{\overline{w}}^*$  и  $\overline{\overline{w}}^*$  построим векторы  $(\alpha, \mu_0) = \rho^*(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \Delta\zeta^*))$ ,  $(\zeta_0 + (\Delta\zeta_0 \oplus \Delta\zeta^*)) \in Z_0 \oplus Z_1$ . Тогда решение  $\overline{x}(t, \alpha, \mu_0)$  с начальными условиями  $\overline{x}(0, \alpha, \mu_0) = \alpha$  является искомым ненулевым  $T$ -периодическим решением системы (2). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Подставляя решение  $\overline{x}(t, \alpha, \mu_0)$  системы (2) в выражение  $x = (E + M)\overline{x}$ , получим, что существует окрестность состояния равновесия  $x \equiv 0$  системы (1), через каждую точку  $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$  которой проходит ненулевое  $T$ -периодическое решение системы (1)  $x(t, \alpha) = (E + M)\overline{x}(t, \alpha, \mu)$ , с начальным условием  $x(0, \alpha) = x(0, \alpha, \mu) = \alpha$ .

**Замечание 2.** Число периодических решений системы (2) с начальными условиями  $\alpha \in U(\delta_0) \setminus \{0\}$  определяется числом решений уравнения  $\tilde{P}_{2(2)}(\zeta_0, \Delta\zeta) = 0$ . Если это уравнение имеет конечное число решений, то в окрестности  $U(\delta_0) \setminus \{0\}$  точка  $x \equiv 0$  является центро-фокусом. Бесконечное множество решений соответствует случаю центра в  $U(\delta_0) \setminus \{0\}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Л.А. Лукашевич, А.П. Садовский. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.
2. *Андреев А.Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. Минск: Выш. шк., 1979. 136 с.
3. *Андреев А.Ф.* Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре / А.Ф. Андреев, И.А. Андреева. Lambert Academic Publishing, 2017. 70 с.
4. *Ильяшенко Ю.С.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Том 1 / Ю.С. Ильяшенко, С.Ю. Яковенко. М.: МЦНМО, 2013. 432 с.
5. *Медведева Н.Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра

- и фокуса // Труды МИАН. 2006. № 254. С. 11–100.
6. Садовский А.П. Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы нелинейных колебаний // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 236–244.
  7. Сахарников Н.А. Об условиях существования центра и фокуса // Прикладная математика и механика. 1950. № 5. С. 513.
  8. Сахарников Н.А. Решение проблемы центра и фокуса в одном случае // Прикладная математика и механика. 1950. № 14. С. 651.
  9. Терехин М.Т. Малые периодические решения системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 1. Рязань. 2020. С. 64–92.
  10. Лискина Е.Ю. О достаточных условиях существования центра нелинейной динамической системы второго порядка // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2007. № 12. С. 32–38.
  11. Лискина Е.Ю. Проблема существования множества ненулевых периодических решений нелинейной автономной динамической системы второго порядка // Вестник РАЕН. 2015. Т. 15, № 3. С. 70–77.

УДК 517.925

**В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**БИФУРКАЦИИ АТТРАКТОРА ИЗ ДВУХ СЕДЕЛ  
И ИХ СЕПАРАТРИС ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ  
С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ**

*Рассматриваются двухпараметрические семейства гладких динамических систем на плоскости, обладающих центральной симметрией. Предполагается, что при нулевых значениях параметров система имеет аттрактор  $\Gamma$ , образованный двумя симметричными седлами с отрицательной седловой величиной и всеми их сепаратрисами. В случае общего положения описываются бифуркации систем такого семейства с параметрами близкими к нулю в окрестности  $\Gamma$ .*

**Ключевые слова:** гладкая динамическая система, седло с отрицательной седловой величиной, сепаратриса, аттрактор, бифуркация, предельный цикл

**V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**BIFURCATIONS OF THE ATTRACTOR FORMED BY TWO  
SADDLES AND THEIR SEPARATRICES OF A DYNAMICAL  
SYSTEM WITH CENTRAL SYMMETRY**

*Two-parameter families of smooth dynamical systems on the plane with central symmetry are considered. It is assumed that at zero values of the parameters, the system has an attractor  $\Gamma$  formed by two symmetric saddles with a negative saddle value and all their separatrices. In the general case, we describe bifurcations of systems of such family with parameters close to zero in a neighborhood of  $\Gamma$ .*

**Keywords:** smooth dynamical system, saddle with a negative saddle value, separatrix, attractor, bifurcation, limit cycle

Изучение бифуркаций в классе гладких динамических систем на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , инвариантных относительно центральной симметрии  $S: x \mapsto -x$ , представляет интерес для приложений. Локальные бифуркации систем коразмерностей один и два описаны в книге [1]. Некоторые не-локальные бифуркации изучались в работах [2–4].

Здесь мы исследуем бифуркации системы, имеющей полицикл  $\tilde{\Gamma}$ , образованный двумя симметричными седлами с отрицательной седловой величиной и всеми их выходящими сепаратрисами, идущими в одно из этих седел.

Рассмотрим семейство векторных полей

$X_\varepsilon(x) = P_1(x, \varepsilon)\partial/\partial x_1 + P_2(x, \varepsilon)\partial/\partial x_2$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}^2$ , инвариантных относительно преобразования симметрии  $S$ , то есть таких, что  $\forall x \in \mathbb{R}^2 X_\varepsilon(-x) = -X_\varepsilon(x)$ . Будем считать, что функции  $P_1$  и  $P_2$  дважды непрерывно дифференцируемы. Пусть  $O_0^+$  и  $O_0^- = S(O_0^+)$  различные седла векторного поля  $X_0$  с собственными значениями матрицы линейной части поля  $\lambda_1^0 > 0$ ,  $\lambda_2^0 < 0$  и седловой величиной  $\lambda_1^0 + \lambda_2^0 < 0$ .

Пусть  ${}^0L_{\omega,k}^+$  ( ${}^0L_{\alpha,k}^+$ ),  $k=1,2$ , – входящие (выходящие) сепаратрисы седла  $O_0^+$ , Тогда  ${}^0L_{\omega,k}^- = S({}^0L_{\omega,k}^+)$  ( ${}^0L_{\alpha,k}^- = S({}^0L_{\alpha,k}^+)$ ) – соответствующие сепаратрисы седла  $O_0^-$ . Рассмотрим два случая.

**Случай 1.**  ${}^0L_{\alpha,1}^+ = {}^0L_{\omega,1}^+$ ,  ${}^0L_{\alpha,2}^+ = {}^0L_{\omega,2}^-$  (и потому  ${}^0L_{\omega,1}^- = {}^0L_{\alpha,1}^-$ ,  ${}^0L_{\alpha,2}^- = {}^0L_{\omega,2}^+$ ).

**Случай 2.**  ${}^0L_{\alpha,1}^- = {}^0L_{\omega,1}^+$ ,  ${}^0L_{\alpha,2}^- = {}^0L_{\omega,2}^+$  (и потому  ${}^0L_{\alpha,1}^+ = {}^0L_{\omega,1}^-$ ,  ${}^0L_{\alpha,2}^+ = {}^0L_{\omega,2}^-$ ).

В случае 1 обозначим

$$\Gamma^\pm := {}^0L_{\alpha,1}^\pm \cup \{O_0^\pm\} = {}^0L_{\omega,1}^\pm \cup \{O_0^\pm\}, \quad \Gamma^0 := {}^0L_{\alpha,2}^\pm \cup {}^0L_{\omega,2}^\pm \cup \{O_0^+\} \cup \{O_0^-\},$$

$$\tilde{\Gamma} := \Gamma := \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^0.$$

Тогда  $S(\Gamma^+) = \Gamma^-$ ,  $S(\Gamma^0) = \Gamma^0$ ,  $S(\Gamma) = \Gamma$ . Будем рассматривать два топологически не эквивалентных варианта вложения  $\tilde{\Gamma}$  в  $\mathbb{R}^2$ . В варианте 1 (в варианте 2) области, ограниченные контурами  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  лежат вне (внутри) области, ограниченной  $\Gamma^0$  (рис. 1 и 2).

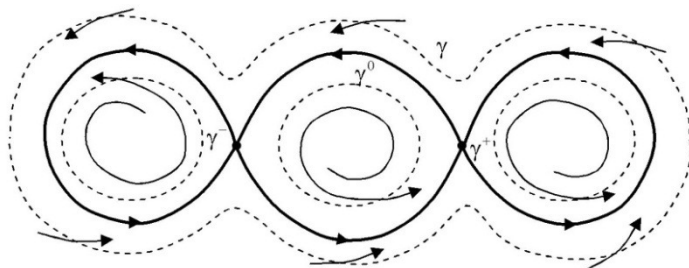


Рис. 1. Аттрактор  $\tilde{\Gamma}$  и поглощающая окрестность  $U$  в случае 1 (вариант 1)

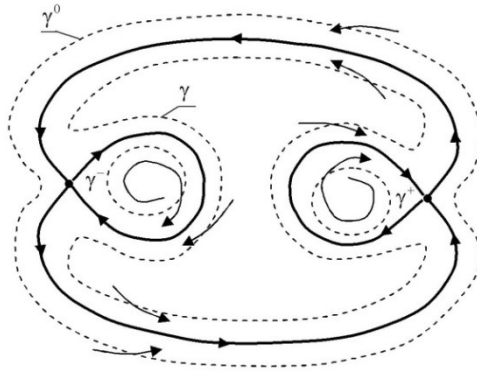


Рис. 2. Аттрактор  $\tilde{\Gamma}$  и поглощающая окрестность  $U$  в случае 1 (вариант 2)

В случае 2 обозначим

$$\Gamma^{\pm} := {}^0L_{\omega,1}^{\pm} \cup {}^0L_{\alpha,2}^{\pm} \cup \{O_0^+\} \cup \{O_0^-\} = {}^0L_{\alpha,1}^m \cup {}^0L_{\omega,2}^m \cup \{O_0^+\} \cup \{O_0^-\},$$

$$\Gamma^0 := {}^0L_{\alpha,2}^{\pm} \cup {}^0L_{\omega,2}^{\pm} \cup \{O_0^+\} \cup \{O_0^-\}, \quad \Gamma := {}^0L_{\alpha,1}^{\pm} \cup {}^0L_{\omega,1}^{\pm} \cup \{O_0^+\} \cup \{O_0^-\}, \quad \tilde{\Gamma} := \Gamma \cup \Gamma^0.$$

Тогда  $S(\Gamma^+) = \Gamma^-$ ,  $S(\Gamma^0) = \Gamma^0$ ,  $S(\Gamma) = \Gamma$ . Мы можем считать, что сепаратрисы пронумерованы так, что область, ограниченная контуром  $\Gamma^0$ , не пересекается с контурами  $\Gamma^+$  и  $\Gamma^-$  (рис. 3).

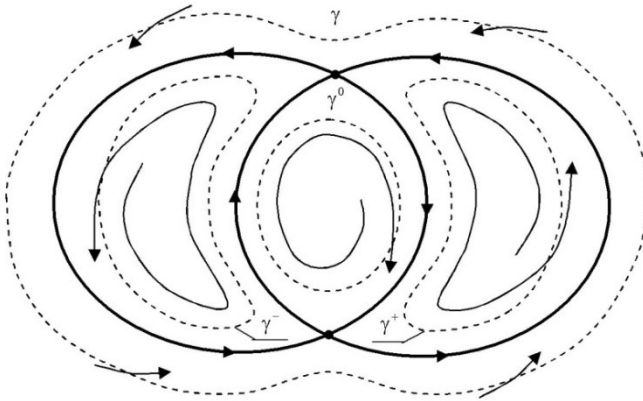


Рис. 3. Аттрактор  $\tilde{\Gamma}$  и его поглощающая окрестность  $U$  в случае 2

Так как седловая величина отрицательна, то в достаточно малых окрестностях сепаратрисных контуров  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$ ,  $\Gamma^0$  и  $\Gamma$  существуют гладкие кривые, соответственно  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ ,  $\gamma^0$  и  $\gamma$  (на рис. 1–3 они изображены пунктирными линиями), трансверсальные полю  $X_0$  и такие, что траектории поля  $X_0$ , начинающиеся в их точках,  $\omega$ -предельны к соответствующему сепаратрисному контуру [5]. Кривые  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$ ,  $\gamma^0$  и  $\gamma$  ограничивают окрестность  $U$  полицикла  $\tilde{\Gamma}$  такую, что положительная полутраектория поля  $X_0$ , начинающаяся в  $U$ , не выходит из  $U$ , а ее  $\omega$ -предельное множество принадлежит  $\tilde{\Gamma}$ . Таким образом,  $\tilde{\Gamma}$  – аттрактор поля  $X_0$ , а  $U$  – его поглощающая окрестность [6, с. 52–53].

Если  $E'$  – достаточно малая окрестность нуля на плоскости параметров, то поле  $X_\varepsilon$  при  $\varepsilon \in E'$  имеет два симметричных седла  $O^\pm(\varepsilon) \in U$ ,  $C^2$ -гладко зависящие от  $\varepsilon$  и совпадающие с  $O_0^\pm$  при  $\varepsilon = 0$ , при этом собственные значения матрицы линейной части поля в них  $\lambda_1(\varepsilon) > 0$  и  $\lambda_2(\varepsilon) < 0$  –  $C^1$ -функции от  $\varepsilon$ ,  $\lambda_1(0) = \lambda_1^0$ ,  $\lambda_2(0) = \lambda_2^0$ . Обозначим  $\sigma(\varepsilon) := \lambda_1(\varepsilon) + \lambda_2(\varepsilon)$  и  $\lambda(\varepsilon) := -\lambda_2(\varepsilon) / \lambda_1(\varepsilon)$  соответственно седловую величину и седловой индекс. Так как  $\sigma(0) < 0$ , то  $\lambda(0) > 1$ , и можно считать  $\lambda(\varepsilon) > 1$  для  $\varepsilon \in E'$ .

Пусть  $\eta_k : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $k = 1, 2$  – такие  $C^1$ -отображения, трансверсальные траекториям поля  $X_0$ , что  $\eta_1(0) \in {}^0L_{\omega,1}^+$ ,  $\eta_2(0) \in {}^0L_{\omega,2}^-$ , а  $\eta_1(0, 1)$  (соотв.  $\eta_2(0, 1)$ ) лежит внутри контура  $\Gamma^+$  (соотв.  $\Gamma^0$ ). Так как локальные инвариантные многообразия седел  $O^\pm(\varepsilon)$   $C^1$ -гладко зависят от  $\varepsilon$  [7], то в случае 1 можно считать, что при  $\varepsilon \in E'$  седло  $O^+(\varepsilon)$  имеет входящую (выходящую) сепаратрису  $L_{\omega,1}^+(\varepsilon)$  ( $L_{\alpha,1}^+(\varepsilon)$ ), пересекающую дугу  $\eta_1(-1, 1)$  в точке  $\eta_1(u_{\omega,1}(\varepsilon))$  ( $\eta_1(u_{\alpha,1}(\varepsilon))$ ), где  $u_{\omega,1}(\cdot), u_{\alpha,1}(\cdot) \in C^1$ ,  $u_{\omega,1}(0) = u_{\alpha,1}(0) = 0$ , седло  $O^-(\varepsilon)$  ( $O^+(\varepsilon)$ ) имеет входящую (выходящую) сепаратрису  $L_{\omega,2}^-(\varepsilon)$  ( $L_{\alpha,2}^-(\varepsilon)$ ), пересекающую дугу  $\eta_2(-1, 1)$  в точке  $\eta_2(u_{\omega,2}(\varepsilon))$  ( $\eta_2(u_{\alpha,2}(\varepsilon))$ ), где  $u_{\omega,2}(\cdot), u_{\alpha,2}(\cdot) \in C^1$ ,  $u_{\omega,2}(0) = u_{\alpha,2}(0) = 0$ . Аналогично в случае 2 можно считать, что при  $\varepsilon \in E'$  седло  $O^+(\varepsilon)$  ( $O^-(\varepsilon)$ ) имеет входящую (выходящую) сепаратрису  $L_{\omega,1}^+(\varepsilon)$  ( $L_{\alpha,1}^-(\varepsilon)$ ), пересекающую дугу  $\eta_1(-1, 1)$  в точке  $\eta_1(u_{\omega,1}(\varepsilon))$  ( $\eta_1(u_{\alpha,1}(\varepsilon))$ ), где  $u_{\omega,1}(\cdot), u_{\alpha,1}(\cdot) \in C^1$ ,  $u_{\omega,1}(0) = u_{\alpha,1}(0) = 0$ , седло

$O^-(\varepsilon)$  ( $O^+(\varepsilon)$ ) имеет входящую (выходящую) сепаратрису  $L_{\omega,2}^-(\varepsilon)$  ( $L_{\alpha,2}^+(\varepsilon)$ ), пересекающую дугу  $\eta_2(-1,1)$  в точке  $\eta_2(u_{\omega,2}(\varepsilon))$  ( $\eta_2(u_{\alpha,2}(\varepsilon))$ ), где  $u_{\omega,2}(\cdot), u_{\alpha,2}(\cdot) \in C^1$ ,  $u_{\omega,2}(0) = u_{\alpha,2}(0) = 0$ .

Обозначим

$$\Delta_k(\varepsilon) := u_{\alpha,k}(\varepsilon) - u_{\omega,k}(\varepsilon), \quad k = 1, 2.$$

Будем считать, что выполняется условие

$$\det(\partial\Delta_i(0)/\partial\varepsilon_j) \neq 0.$$

Сделав замену параметров  $\tilde{\varepsilon}_1 = \Delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2 = \Delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  и вернувшись к их прежним обозначениям, можно далее считать, что  $\Delta_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1$ ,  $\Delta_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_2$  (рис. 4–6).

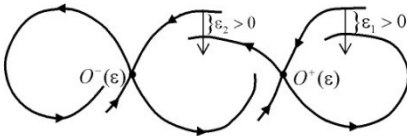


Рис. 4. Выбор параметров. Случай 1 (вариант 1)

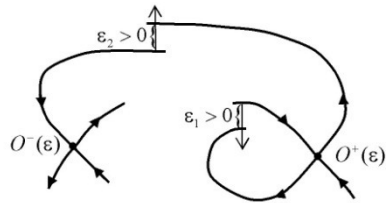


Рис. 5. Выбор параметров. Случай 1 (вариант 2)

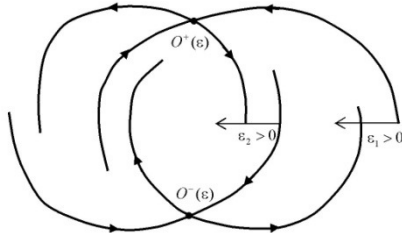


Рис. 6. Выбор параметров. Случай 2

**Теорема.** Существуют число  $\delta > 0$  и разбиение области параметров  $(-\delta, \delta)^2$  на множества  $B_0, B_i, E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , где: в случае 1 (рис. 7)

$$B_0 = \{(0, 0)\}, B_1 = (0, \delta) \times \{0\}, B_2 = \{0\} \times (0, \delta), B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\},$$

$$B_5 = \{0\} \times (-\delta, 0), B_3 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_3(\varepsilon_1)\}, B_6 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_6(\varepsilon_2)\},$$

$$\beta_k : (-\delta, 0) \rightarrow (0, \delta), \beta_k(-0) = \beta_k'(-0) = 0, \quad k = 3, 6;$$



в случае 2 (рис. 8)

$$B_0 = \{(0, 0)\}, B_1 = (0, \delta) \times \{0\}, B_3 = \{0\} \times (0, \delta),$$

$$B_4 = (-\delta, 0) \times \{0\}, B_6 = \{0\} \times (-\delta, 0),$$

$$B_2 = \{\varepsilon : \varepsilon_2 = \beta_2(\varepsilon_1)\}, \beta_2 : (0, \delta) \rightarrow (0, \delta), \beta_2(+0) = \beta_2'(+0) = 0,$$

$$B_5 = \{\varepsilon : \varepsilon_1 = \beta_5(\varepsilon_2)\},$$

$$\beta_5 : (-\delta, 0) \rightarrow (-\delta, 0), \beta_5(-0) = \beta_5'(-0) = 0,$$

$E_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) – связная компонента  $(-\delta, \delta)^2 \setminus \bigcup_{j=0}^6 B_j$ , в границу которой входят  $B_i$  и  $B_{i+1}$  (здесь  $B_7 = B_1$ ), со следующими свойствами:

Любая траектория поля  $X_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ , начинающаяся в окрестности  $U$ , отличная от седел  $O^+(\varepsilon)$  и  $O^-(\varepsilon)$  и их выходящих сепаратрис, при убывании времени покидает  $U$ , а  $\omega$ -предельным множеством любой траектории, начинающейся в  $U$ , отличной от седел  $O^+(\varepsilon)$ ,  $O^-(\varepsilon)$  и их входящих сепаратрис, является одно из следующих множеств:

при  $\varepsilon \in B_1$  два грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$  соответственно  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ , и сепаратрисный контур, гомотопный  $\gamma^0$ ;

при  $\varepsilon \in E_1$  три грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$  соответственно  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  и  $\gamma^0$ ;

при  $\varepsilon \in B_2$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma^0$ , и петли сепаратрис седел  $O^+(\varepsilon)$  и  $O^-(\varepsilon)$ , гомотопные соответственно  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ ;

при  $\varepsilon \in E_2$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma^0$ ;

при  $\varepsilon \in B_3$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma^0$ , и сепаратрисный контур, гомотопный  $\gamma$ ;

при  $\varepsilon \in E_3$  два грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$ , соответственно  $\gamma^0$  и  $\gamma$ ;

при  $\varepsilon \in B_4$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma$ , и сепаратрисный контур, гомотопный  $\gamma^0$ ;

при  $\varepsilon \in E_4$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma$ ;

при  $\varepsilon \in B_5$  грубый цикл, гомотопный в  $\bar{U}$  кривой  $\gamma$ , и петли сепаратрис седел  $O^+(\varepsilon)$  и  $O^-(\varepsilon)$ , гомотопные соответственно  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ ;

при  $\varepsilon \in E_5$  три грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$  соответственно  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  и  $\gamma$ ;

при  $\varepsilon \in B_6$  два грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$ , соответственно  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ , и сепаратрисный контур, гомотопный  $\gamma$ ;

при  $\varepsilon \in E_6$  два грубых цикла, гомотопных в  $\bar{U}$ , соответственно  $\gamma^+$  и  $\gamma^-$ .

Для любых  $\varepsilon', \varepsilon'' \in B_i$  или  $\varepsilon', \varepsilon'' \in E_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) векторные поля  $X_{\varepsilon'}$  и  $X_{\varepsilon''}$  топологически эквивалентны в  $U$ .

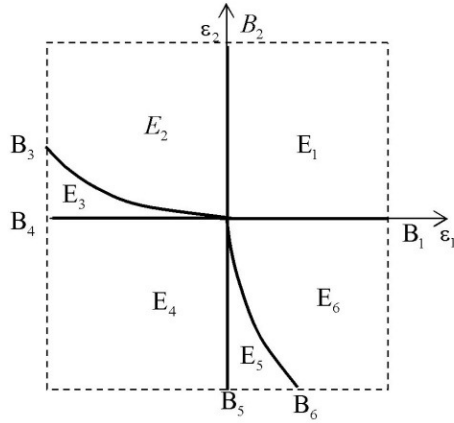


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма в случае 1

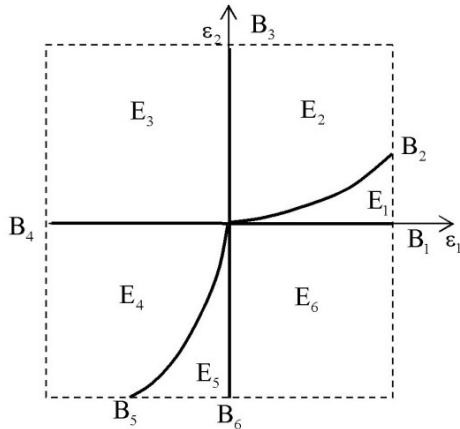


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма в случае 2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
2. *Ройтенберг В.Ш.* Векторные поля на плоскости с центральной симметрией: грубость и первая степень негрубости // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2021. № 2 (281). С. 27–40. DOI: 10.53598/2410-3225-2021-2-281-27-40.
3. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации полицикла, образованного двумя петлями сепаратрис негрубого седла динамической системы с центральной симметрией // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Серия «Математика. Механика. Физика» 2021. Т. 13, № 2. С. 39–46. DOI: 10.14529/mmph210305.
4. *Roitenberg V.Sh.* Bifurcations of a polycycle formed by separatrices of saddles of a dynamical system with central symmetry // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: сб. материалов междунар. конф. Белгород, 25–29 октября 2021 г. / под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. С. 311–312.
5. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. М.: Наука, 1967. 487 с.
6. *Палис Ж.* Геометрическая теория динамических систем. Введение / Ж. Палис, В. Мелу. М.: Мир, 1986. 301 с.
7. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1 / Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Москва-Ижевск: ИКИ, 2004. 416 с.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 517.9:378.147

**Н. В. Белецкая, М. И. Джиоева, Т. С. Хачлаев**

Российский технологический университет (РТУ МИРЭА)  
Россия, г. Москва, e-mail: [beletskaya@mirea.ru](mailto:beletskaya@mirea.ru), [mdjioeva@yandex.ru](mailto:mdjioeva@yandex.ru),  
[khachlaev@mirea.ru](mailto:khachlaev@mirea.ru)

## ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО КУРСУ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИСТАНЦИОННОМ ФОРМАТЕ

*Рассматриваются особенности проведения практических занятий по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений в дистанционном формате.*

***Ключевые слова:** дистанционный формат обучения, курс обыкновенных дифференциальных уравнений*

**N. V. Beletskaya, M. I. Dzhioeva, T. S. Khachlaev**

Russian Technological University (RTU MIREA)  
Russia, Moscow, e-mail: [beletskaya@mirea.ru](mailto:beletskaya@mirea.ru), [mdjioeva@yandex.ru](mailto:mdjioeva@yandex.ru),  
[khachlaev@mirea.ru](mailto:khachlaev@mirea.ru)

## FEATURES OF CONDUCTING PRACTICAL EXERCISES ON THE COURSE OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN REMOTE FORMAT

*The features of conducting practical exercises are considered in a distance format according to the course of ordinary differential equations.*

***Keywords:** distance learning format, course of ordinary differential equations*

Уже два года как эпидемиологическая ситуация в мире существенно изменила жизнь общества практически во всех сферах. Значительные изменения произошли и в сфере высшего образования.

Наш вуз, МИРЭА-Российский технологический университет, как и многие другие учебные заведения, с сентября 2021 года вернулся к сме-

шанному (лекции - удаленно, практические занятия и лабораторные работы - очно), а затем и к полностью дистанционному формату работы, который был достаточно освоен в прошлом учебном сезоне.

Первый шок от возникших проблем был хоть и очень ощутимым, но, тем не менее, прошел достаточно быстро. Во многом это, конечно, заслуга руководства вуза, грамотно организовавшего в кратчайшие сроки дистанционное обучение.

Летнюю сессию предыдущего, 2019-2020, учебного года на кафедре высшей математики было решено провести в форме тестирования. К составлению тестов преподаватели подошли очень ответственно, и, несмотря на короткие сроки, были разработаны содержательные тесты, позволяющие оценить теоретические знания и их практическое применение студентами.

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений в Институте искусственного интеллекта (бывший Институт кибернетики) для большинства направлений подготовки и специальностей читается в осеннем (третьем) семестре. У нас была возможность к предстоящей зимней сессии проанализировать результаты летних экзаменов, учесть выявленные слабые стороны и составить тест, который бы давал возможность оценить реальные знания студентов по данному курсу. И сами задачи, и ответы к ним были подобраны и составлены таким образом, чтобы минимизировать возможность поиска готовых ответов через интернет или в учебниках (подробнее см. в [4]).

Результатом нашей работы стал адекватный тест, что было подтверждено проведенными с его применением экзаменами. Неожидаемых результатов практически не было, студенты в подавляющем большинстве получили прогнозируемые баллы. Надо отметить, что и по оценке самих студентов «все было честно».

Со временем стало очевидно, что дистанционный формат при творческом подходе может расширить возможности и преподавателей, и студентов в изложении и освоении изучаемых курсов. Это исключительно эффективно при проведении практических занятий.

Если лекции в нашем вузе читаются на платформе Webinar.ru, то инструменты для проведения практических занятий преподаватель выбирает самостоятельно. Жестких ограничений нет. Кто-то предпочитает Webinar.ru, кто-то Zoom и т.д. Однако важно, что на всех используемых платформах есть возможность решения задач не только в интерактивной форме, но и использования презентаций заранее подготовленных решений. После практического занятия запись его проведения вместе с файлами презентаций размещается в системе дистанционного обучения вуза (СДО). Это создает для студентов дополнительные возможности для глубокого освоения изложенного материала. Практика показывает, что многие из них активно этим пользуются.

При этом приходится признать, что по сравнению с традиционной формой занятий подготовка вебинара требует от преподавателя гораздо больше времени.

В процессе подготовки преподавателю необходимо учитывать следующее:

- а) неизбежность повторения отдельных ранее пройденных тем;
- б) необходимость разбора и решения стандартного набора дифференциальных уравнений по текущей теме;
- в) заинтересованность части студентов в решении нестандартных задач, а также задач повышенной сложности.

При традиционных (очных) занятиях преподаватель успевает реализовать, как правило, только пункты а) и б). Редко в какой группе бывает возможность разобрать нестандартные задачи. А вот в условиях дистанционного формата появляется возможность предоставить заранее подготовленные задачи с решениями, освободить небольшой промежуток времени и за счёт этого раздвинуть стандартные рамки. Для этого при подготовке к занятию преподаватель составляет письменное изложение теорем, формул, необходимых для занятия. Как правило, это в основном сведения из математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии. Например, вычисление некоторых интегралов, нахождение собственных значений и т. п. Это даёт возможность при решении задач из п. б) не погружаться в длинные детальные выкладки. Однако при этом преподаватель все рассматриваемые на занятии задачи с подробными решениями в тот же день выкладывает в СДО. Весь этот объём подготовительной работы (надо подчеркнуть, что немалый) даёт преподавателю возможность повысить интерес студентов к своему предмету, их профессиональный и научный уровень.

Помимо задач повышенной сложности имеется возможность продемонстрировать студентам задачи олимпиадного уровня.

В качестве примера приведём несколько задач различного уровня сложности с краткими решениями.

При подборе мы пользовались такими популярными задачками по дифференциальным уравнениям, как [1-3], а также [4], материалами студенческих математических олимпиад разных лет.

### Пример 1. (Хачлаев Т. С.)

Может ли уравнение  $\dot{x} = f(t, x, \dot{x})$  с функцией  $f \in C^1$  на интервале  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  иметь обе функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  среди своих решений?

1)  $x_1(t) = 3 + \sin t - 2 \cos t, x_2(t) = \frac{1}{1-t}$ .

2)  $x_1(t) = e^t, x_2(t) = e^{3t}$ .

**Решение:**

1) Нет, не может в силу единственности решения задачи Коши, так как  $x_1(0) = x_2(0) = 1$  и  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1$ .

2) Может.

Например: уравнение  $\ddot{x} = 4\dot{x} - 3x$ .

Нелинейные уравнения высших порядков с переменными коэффициентами обычно вызывают у студентов затруднения. Поэтому предлагаем уделить больше времени методу выделения интегрируемых комбинаций.

**Пример 2. [2]**

Найти общее решение уравнения  $y'' = y'/x + 4x^2 + (y')^2$ .

**Решение:**

$$\begin{aligned} y'' - y'/x &= 4x^2 + (y')^2 \Rightarrow x \frac{y''x - y'}{x^2} = 4x^2 + (y')^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \left( \frac{y'}{x} \right)' = 4x^2 + \left( x \frac{y'}{x} \right)^2 \Rightarrow xz' = x^2z^2 + 4x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 4} = xdx \Rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = 2 \operatorname{tg}(x^2 + C_1) \Rightarrow y' = 2x \operatorname{tg}(x^2 + C_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -\ln(C_2 \cos(x^2 + C_1)). \end{aligned}$$

**Пример 3. [1]**

Решить задачу Коши

$$xyy'' + y^2 = x(y')^2 + (x-1)yy'; \quad y(1) = y'(1) = 2.$$

**Решение:**

$$\begin{aligned} x(y')^2 - xy y'' &= y^2 - (x-1)yy' \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \frac{(y')^2 - yy''}{(y')^2} = \left( \frac{y}{y'} \right)^2 - (x-1) \frac{y}{y'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \left( \frac{y}{y'} \right)' = \left( \frac{y}{y'} \right)^2 - (x-1) \frac{y}{y'}; \quad \frac{y}{y'} = z \Rightarrow \\ &\Rightarrow xz' = z^2 - (x-1)z \quad - \text{уравнение Бернулли.} \\ &\Rightarrow z' = \left( \frac{1-x}{x} \right) z + \frac{1}{x} z^2; \quad z = uv \Rightarrow \\ &\Rightarrow u'v + uv' + \left( \frac{x-1}{x} \right) uv = \frac{1}{x} u^2 v^2 \Rightarrow u'v + u \left( v' + \frac{x-1}{x} v \right) = \frac{1}{x} u^2 v^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v' + \frac{x-1}{x}v &= 0; \frac{dv}{v} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx; \ln v = \ln x - x; v = xe^{-x}; \\ \Rightarrow u'xe^{-x} &= \frac{1}{x}x^2e^{-2x}u^2; \quad -\frac{du}{u^2} = -e^{-x}dx; \frac{1}{u} = e^{-x} + C; \\ \Rightarrow \frac{1}{uv} &= (e^{-x} + C)e^x \frac{1}{x}; \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C \frac{e^x}{x}; \frac{y'}{y} = C \frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}; \\ x &= 1; \quad 1 = C \cdot e + 1 \Rightarrow C = 0. \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x}; \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \ln y = \ln Cx; y = Cx; \\ \Rightarrow y(1) &= 2 \Rightarrow C = 2; y = 2x. \end{aligned}$$

**Пример 4. [3]**

Найти общее решение уравнения

$$(x^2 - 1)dx + (x^2y^2 + x^3 + x)dy = 0.$$

**Решение:** Разделим обе части на  $x^2dx$ :

$$\begin{aligned} y^2y' + xy' + \frac{1}{x}y' + 1 - \frac{1}{x^2} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2y' + xy' + \frac{1}{x}y' + 1 - \frac{1}{x^2} + 2yy' - 2y' - 2yy' + 2y' &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x^2} + 2yy' - 2y'\right) + y'(y^2 + x + \frac{1}{x} - 2y + 2) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Заметим, что  $(x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2)' = (1 - \frac{1}{x^2} + 2yy' - 2y')$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{(x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2)'}{(x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2)} &= -y' \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln\left(x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2\right) &= -y + \ln C \Rightarrow \\ x + \frac{1}{x} + y^2 - 2y + 2 &= Ce^{-y}. \end{aligned}$$

В следующем примере необходимо обратить внимание студентов на то, что ищется решение задачи Коши, т.е. можно не доводить процесс до общего решения данного дифференциального уравнения. Тем более что в процессе решения возникает необходимость вычисления «неберущегося» интеграла.

**Пример 5. [2]**

Решить задачу Коши

$$xyu'' - x(y')^2 + y'(y' + y) \cdot \sin x = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1.$$



**Решение:** Заменой  $y' = yz$ ,  $y'' = y(z^2 + z')$  уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} x(z^2 + z') - xz^2 + z(z + 1) \cdot \sin x &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{z'}{z(z + 1)} &= -\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \int \left( \frac{1}{z + 1} - \frac{1}{z} \right) dz = \int \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{z + 1}{z} \right| &= \int \frac{\sin x}{x} dx + \ln C \Rightarrow \frac{z + 1}{z} = C_1 \cdot e^{\int \frac{\sin x}{x} dx}. \end{aligned}$$

Воспользуемся начальными данными:

$$z = \frac{y'}{y}, \quad z(1) = -1,$$

и для  $C_1$  получаем  $\frac{-1+1}{1} = C_1 \cdot e^{\int \frac{\sin x}{x} dx} \Rightarrow C_1 = 0$ .

Окончательно получаем следующее решение задачи Коши:  $y(x) = e^{1-x}$ .

Приведем пример нестандартной задачи с параметрами.

### Пример 6. [5]

Указать все действительные значения  $a$  и  $b$ , при которых решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$(x^2 + 1)y' + \sqrt{y} = a \cos x + b \sin x, \quad y(0) = 1,$$

в некоторой окрестности  $x = 0$  удовлетворяет условию  $y(x) \geq 1$ .

**Решение:**  $y(x) \geq 1 = y(0)$  в окрестности  $x = 0$ , если только  $x = 0$  — точка минимума  $y(x)$ . Для этого необходимо, чтобы  $y'(0) = 0$ , и необходимо и достаточно выполнение неравенства  $y''(0) \geq 0$  (если  $y''(0) < 0$ , то  $x = 0$  — точка максимума). Из уравнения, полагая в нем  $x = 0$ , находим

$$1 \cdot y'(0) + \sqrt{y(0)} = a \cdot 1 + b \cdot 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 1 = a, \quad a = 1.$$

Продифференцируем обе части исходного уравнения и положим  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} 2xy'(x) + (x^2 + 1)y''(x) + \frac{0,5y'(x)}{\sqrt{y(x)}} &= -a \sin x + b \cos x \Rightarrow \\ \Rightarrow y''(0) &= b \geq 0. \end{aligned}$$

Покажем, что  $b \neq 0$ . Дифференцируя уравнение еще раз и полагая  $x = 0$ ,  $b = 0$ , найдем, что  $y'''(0) = -1$ , т.е. при  $b = 0$   $x = 0$  — абсцисса точки перегиба  $(0; 1)$ , т.к.  $y''(0) = 0$  и  $y''(x)$  убывает в окрестности  $x = 0$ .

Тогда неравенство  $y(x) \geq 1$  невозможно.

**Ответ:**  $y(x) \geq 1$  в окрестности  $x = 0$ , если  $a = 1$  и  $b > 0$  — любое.

Подводя итог вышеизложенному, следует отметить, что дистанционная форма обучения предоставляет различные возможности для повышения интереса и студентов, и преподавателей к данной дисциплине, разнообразит за счет большей наглядности структуру излагаемого материала, требует большего внимания к подготовке и участию в семинаре и, как правило, положительно оценивается студентами.

Итак, мы подчеркнули некоторые плюсы дистанционного формата. Но надо отметить отсутствие эйфории у студентов и преподавателей по поводу этой формы занятий. Отсутствие очного общения приводит к минимальной обратной связи, что делает почти невозможным объективный контроль за усвоением предмета.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 176 с.
2. *Романко В.К.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002. 256 с.
3. *Битнер Г.Г.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008. 204 с.
4. *Белецкая Н.В.* Проведение экзамена по курсу «Дифференциальные уравнения» в форме онлайн-тестирования / Н.В. Белецкая, М.И. Джигоева, Т.С. Хачлаев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2021. С. 21-23.
5. *Беркович Ф.Д.* Задачи студенческих олимпиад по математике с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф.Д. Беркович, В.С. Федий. Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. 171 с.

УДК 51:378.147

**Л. В. Белякова, Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов,  
С. А. Старостина**

Государственный университет морского и речного флота  
им. адмирала С.О. Макарова  
Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru,  
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo\_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru*

## **ДИСТАНЦИОННАЯ ОЛИМПИАДА ПЕРВОКУРСНИКОВ ГУМРФ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ В 2021 ГОДУ**

*В данной статье рассматривается опыт организации и проведения региональной межвузовской дистанционной олимпиады первокурсников по элементарной математике в Государственном университете морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова (ГУМРФ) в 2021 году. Представлены задачи олимпиады первокурсников, а также приведены их решения.*

**Ключевые слова:** олимпиада первокурсников, олимпиадные задачи, студенческие математические олимпиады, дистанционный формат олимпиады

**L. V. Belyakova, N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov,  
S. A. Starostina**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping  
Russia, Saint Petersburg, *e-mail: liubov.belyakova@yandex.ru,  
gulevich.nikolay@gmail.com, kvo\_kuz@mail.ru, sardana-starostina@mail.ru*

## **DISTANCE OLYMPIAD FOR FIRST-YEAR STUDENTS AT THE ADMIRAL MAKAROV STATE UNIVERSITY OF MARITIME AND INLAND SHIPPING IN ELEMENTARY MATHEMATICS IN 2021**

*This article examines the experience of organizing and conducting a regional interuniversity distance olympiad for freshmen in elementary mathematics at the State University of Maritime and River Fleet named after Admiral S.O. Makarov (GUMRF) in 2021. The problems of the Olympiad for freshmen are presented, as well as their solutions.*

**Keywords:** olympiad for first-year students, olympiad problems, student mathematical olympiad, distance format of the olympiad

Олимпиада первокурсников по элементарной математике является весьма удачной и эффективной формой интеллектуального соревнования,

которая позволяет заинтересовать студентов и курсантов наукой в самом начале их обучения в вузе; даёт возможность почувствовать вкус первых побед; тем самым стимулирует и мотивирует обучающихся заниматься математикой углубленно.

Впервые олимпиада первокурсников по элементарной математике была проведена руководителями математического кружка кафедры математики «Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций» в сентябре 2011 года [1-3]. С сентября 2013 года традицию проведения олимпиады первокурсников как эффективную форму выявления и привлечения к олимпиадному движению наиболее талантливых курсантов поддержали коллеги с кафедры высшей математики Общеинженерного факультета Морской академии [4, 5]. С сентября 2015 года проводится единая олимпиада первокурсников для всех институтов Государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова (ГУМРФ), а с 2017 года в олимпиаде первокурсников ГУМРФ стали принимать участие гражданские и военные вузы Санкт-Петербурга, Калининграда и Костромы, при этом удаленные вузы принимали участие в олимпиаде дистанционно [6].

Полностью дистанционная форма организации олимпиады первокурсников для всех команд была успешно апробирована в сентябре 2019 [7]. А с 2020 года, в связи со сложившейся санитарно-эпидемиологической обстановкой, и по настоящее время дистанционный формат является практически единственно возможной формой проведения межвузовской олимпиады, поэтому является особенно актуальной и востребованной [8].

Дистанционный формат проведения любой олимпиады требует своей методики подбора задач и оценивания их решений, а также своего порядка проведения, отличного от традиционного [9]. Предложенный 10-бальный критерий оценивания решений задач позволяет достаточно тонко оценить работу каждого участника и выделить в команде из десяти человек каждого вуза четырех сильнейших для поощрения дипломами 1-3-й степени и поощрительным дипломом.

На олимпиаде первокурсников ГУМРФ 22 сентября 2021 года к решению было предложено 9 задач. Многие задачи можно было решить несколькими способами с привлечением различных приемов и методов, что при последующем разборе олимпиадных задач, например, на занятиях математического кружка, является весьма ценным в познавательно-методическом плане. Решение задачи разными способами помогает развить у студентов и курсантов способность нешаблонно мыслить, творчески подойти к решению задачи, восполнить пробелы в ранее изученных темах, содействует развитию логического мышления, его глубины и гибкости, а также познавательной активности [10].

**Задачи олимпиады первокурсников и их решения**

**Задача 1.** Из пунктов  $A$  и  $B$  навстречу друг другу выехали одновременно два велосипедиста. В 12.00 они встретились, и каждый из них продолжил свой путь. Один из велосипедистов приехал в пункт  $B$  в 13.00, другой — в пункт  $A$  в 14.15. Когда стартовали велосипедисты?

**Решение.** Пусть  $t$  — время, прошедшее от старта до встречи велосипедистов (в часах),  $v_1$  и  $v_2$  — их скорости (в км/ч). Тогда до встречи один велосипедист проехал  $v_1 t$  км, другой —  $v_2 t$  км. Поскольку на оставшийся после встречи путь первый велосипедист затратил  $13 - 12 = 1$  час, а второй  $14\frac{1}{4} - 12 = \frac{9}{4}$  часа, то получаем

$$\begin{cases} \frac{9}{4}v_2 = v_1 t, \\ v_2 t = v_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{4}v_2 = v_2 t^2 \Rightarrow t = 1,5 \Rightarrow 12 - 1,5 = 10,5.$$

**Ответ.** Велосипедисты стартовали в 10 часов 30 минут.

**Задача 2.** Сравнить числа  $\log_5 6$  и  $\log_6 7$ .

**Решение 1.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \log_x(x+1)$ ,  $x \in (1; +\infty)$ . Тогда  $f(5) = \log_5 6$ ,  $f(6) = \log_6 7$ .

$$f'(x) = \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)' = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} < 0 \Rightarrow f(5) > f(6).$$

**Ответ.**  $\log_5 6 > \log_6 7$ .

**Решение 2.**  $\log_5 6 - \log_6 7 = \frac{1 - \log_6 5 \cdot \log_6 7}{\log_6 5} > 0$ , так как

$$\sqrt{\log_6 5 \cdot \log_6 7} \leq \frac{1}{2}(\log_6 5 + \log_6 7) = \frac{1}{2} \log_6 35 < \frac{1}{2} \log_6 6^2 = 1.$$

**Ответ.**  $\log_5 6 > \log_6 7$ .

**Задача 3.** Решить уравнение  $\log_2(1 + \cos x) = 1 + \left| \sin \frac{x}{3} \right|$ .

**Решение.** Поскольку  $1 + \cos x \leq 2$ , то

$$1 \geq \log_2(1 + \cos x) = \left| \sin \frac{x}{3} \right| + 1 \geq 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2(1 + \cos x) = 1, \\ \left| \sin \frac{x}{3} \right| + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin \frac{x}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = 3\pi k \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\pi n = 3\pi k \Rightarrow 2n = 3k \Rightarrow k - \text{четно, т.е. } k = 2l, l \in \mathbb{Z}.$$

Проверка показывает, что значения  $x = 6\pi l$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) удовлетворяют уравнению.

**Ответ.**  $x = 6\pi l, l \in \mathbb{Z}$ .

**Задача 4.** В квадрате  $ABCD$  взята точка  $M$  так, что  $\angle MAD = \angle MDA = 15^\circ$ . Доказать, что треугольник  $BCM$  – правильный.

**Решение 1.** Пусть стороны квадрата равны  $2a$ . Из точки  $M$  опустим перпендикуляры  $ML$  и  $MK$  на стороны  $AB$  и  $AD$  соответственно. Тогда  $ML = a$ ,  $MK = a \operatorname{tg} 15^\circ$ ,  $AL = MK = a \operatorname{tg} 15^\circ$  и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{ML}{BL} = \frac{a}{2a - a \operatorname{tg} 15^\circ}$ , где  $\alpha$  – угол  $MBL$ .

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a - a(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,  $\alpha = 30^\circ$ , поскольку

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Так как треугольник  $BCM$  равнобедренный, то все его углы равны  $60^\circ$  и, значит, треугольник  $BCM$  – правильный.

**Решение 2.** Внутри квадрата  $ABCD$  на стороне  $AB$ , как на основании, строим треугольник  $ABK$ , равный треугольнику  $ADM$ . Тогда треугольник  $AMK$  – правильный, так как он равнобедренный, и угол при вершине  $A$  у него равен  $60^\circ$ . В равнобедренном треугольнике  $BKM$  угол при вершине  $K$  равен  $150^\circ$ , поэтому треугольник  $BKM$  равен треугольнику  $ADM$ , а его сторона  $BM$  равна стороне квадрата. Далее, треугольник  $BCM$  – равнобедренный и имеет три равные стороны, значит, он правильный.

**Задача 5.** Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3x \text{ на отрезке } \left[ 0, \frac{13}{20} \right].$$

**Решение.** Для функции  $f(x)$  имеем

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 - 8x + 3 = (8x^3 - 1) - (8x - 4) = \\ &= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4(2x - 1) = (2x - 1)(4x^2 + 2x - 3). \end{aligned}$$

На отрезке  $\left[0, \frac{13}{20}\right]$  выполняется неравенство

$$(4x^2 + 2x - 3)' = 8x + 2 > 0,$$

и потому

$$4x^2 + 2x - 3 \leq 4\left(\frac{13}{20}\right)^2 + 2 \cdot \frac{13}{20} - 3 = -\frac{1}{100} < 0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} f'(x) = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{13}{20} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2};$$

при этом  $f'(x) > 0$  для  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$  и  $f'(x) < 0$  для  $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{13}{20}\right]$ .

Таким образом,  $y_{\text{наиб}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$ .

**Ответ.**  $\frac{5}{8}$ .

**Задача 6.** Найти последнюю цифру числа  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2021^3$ .

**Решение 1.** Если  $l \in \mathbb{N}$ , то число

$$l^3 + (2020 - l)^3 = 2020(l^2 - l(2020 - l) + (2020 - l)^2)$$

делится на 10. Следовательно, число

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2020^3 &= \left(1^3 + (2020 - 1)^3\right) + \left(2^3 + (2020 - 2)^3\right) + \dots + \\ &+ \left(1009^3 + (2020 - 1009)^3\right) + 1010^3 + 2020^3 \end{aligned}$$

делится на 10 и, значит, последняя цифра числа  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2021^3$  совпадает с последней цифрой числа  $2021^3$ .

**Ответ:** 1.

**Решение 2.** Методом математической индукции доказывается, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

При  $n = 2021$  легко находим последнюю цифру числа  $(2021 \cdot 1011)^2$ . Она равна 1.

**Ответ:** 1.

**Задача 7.** Даны вещественные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ ; причем  $a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} = 1$ . Доказать, что  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2021}^2 \geq \frac{1}{2021}$ .

**Решение 1.**

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 &= \left( \left( a_1^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \left( a_2^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \dots + \left( a_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \right) - \frac{1}{n} \geq \\ &\geq \left( 2 \frac{a_1}{n} + 2 \frac{a_2}{n} + \dots + 2 \frac{a_n}{n} \right) - \frac{1}{n} = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

При  $n = 2021$  получаем требуемое неравенство.

**Решение 2.** (Данное решение привел ученик 10-го класса Миша Гурьев, выступавший на олимпиаде вне конкурса).

Применим неравенство о среднем квадратическом и среднем арифметическом:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2021}^2}{2021}} \geq \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{2021}|}{2021}.$$

Поскольку  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{2021}| \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{2021} = 1$ , то

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2021}^2}{2021}} \geq \frac{1}{2021} \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2021}^2 \geq \frac{1}{2021}.$$

**Комментарий.** Данное неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

при

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{если } a_k \geq 0 \\ -1, & \text{если } a_k < 0 \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



Неравенство Коши-Буняковского нетрудно доказать с помощью метода математической индукции, что посильно «продвинутому» школьнику.

**Задача 8.** Одна из медиан треугольника равна 3, другая – 9. Среди всех таких треугольников найти треугольник наибольшей площади и длину его третьей медианы.

**Решение.** Предполагая, что такие треугольники существуют, введем обозначения:  $A, B, C$  – вершины треугольника;  $AK$  и  $BL$  – его медианы с длинами 9 и 3 соответственно;  $O$  – точка пересечения медиан;  $\alpha$  – угол  $AOB$ . Найдем площадь треугольника  $ABC$ :

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \sin \alpha = 6 \sin \alpha, \quad S_{\triangle BOK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin(\pi - \alpha) = 3 \sin \alpha,$$

$$S_{\triangle AOL} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \sin(\pi - \alpha) = 3 \sin \alpha, \quad S_{\triangle COK} = S_{\triangle BOK} = 3 \sin \alpha,$$

$$S_{\triangle COL} = S_{\triangle AOL} = 3 \sin \alpha.$$

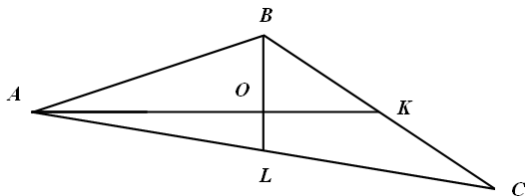
Таким образом,

$$S_{\triangle ABC} = 18 \sin \alpha \leq 18 \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABC} = 18 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2},$$

т.е. когда медианы  $AK$  и  $BL$  перпендикулярны.

Найдем медиану  $CM$ . Поскольку треугольник  $\triangle AOB$  – прямоугольный, то

$$OM = \frac{1}{2} AB = \sqrt{10} \Rightarrow CM = 3\sqrt{10}.$$



Покажем, что такой треугольник существует. Построим отрезки  $AO = 6$ ,  $OK = 3$ ,  $OB = 4$  так, чтобы  $OB \perp AK$ . Проведем  $AB$  и  $BK$ ; на прямой  $BK$  отложим  $KC = BK$  и соединим отрезком точки  $A$  и  $C$ . Пусть  $L$  – точка пересечения прямых  $OB$  и  $AC$ . Тогда  $AK$  – медиана треугольника  $ABC$ , и поскольку  $AO = 2OK$ , то  $BL$  – также медиана и  $OL = \frac{1}{2} OB = 2$ .

**Ответ.** Треугольник, медианы которого перпендикулярны; длина третьей медианы  $3\sqrt{10}$ .

**Задача 9.** Доказать неравенство  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} > 2021$ .

**Решение 1.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{4042}} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{2^{4041} + 1} + \frac{1}{2^{4041} + 2} + \dots + \frac{1}{2^{4042}}\right) > \frac{1}{2} \cdot 4042 = 2021, \end{aligned}$$

поскольку  $\underbrace{\frac{1}{2^{k-1} + 1} + \frac{1}{2^{k-1} + 2} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ слагаемых}} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$  при  $k \geq 2$ .

**Решение 2.** На координатной плоскости проведем гиперболу  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . На оси  $Ox$  построим прямоугольники с основаниями  $[k, k+1]$  и высотами  $\frac{1}{k}$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Получилась ступенчатая фигура, внутри которой лежит график гиперболы на отрезке  $[1, n+1]$ , поскольку функция  $y = \frac{1}{x}$  убывает на  $(0, +\infty)$ . Тогда площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, больше площади фигуры, ограниченной снизу отрезком  $[1, n+1]$ , сверху — гиперболой, т.е.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) - 1.$$

При  $n = 4^{2021}$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{2021}} &> \ln(4^{2021} + 1) - 1 > \\ &> 2021 \ln 4 - 1 > 2021 \cdot \frac{4}{3} - 1 > 2693, \end{aligned}$$

так как

$$\ln 4 > \frac{4}{3} \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8 > e^2 \quad (e^2 < 2,8^2 = 7,84 < 8).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гулевич Н.М.* Олимпиада по элементарной математике для первокурсников СПГУВК / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. СПб.: Изд-во ГУМРФ, 2013. Вып. 4. С. 81–86.
2. *Гулевич Н.М.* Математическая олимпиада студентов первого курса СПГУВК по элементарной математике / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. СПб.: Изд-во ГУМРФ, 2015. Вып. 5. С. 39–40.
3. *Гулевич Н.М.* Математические олимпиады ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения: межвуз. сб. науч. тр. СПб.: Изд-во ГУМРФ, 2018. Вып. 6. С. 72–77.
4. *Старостина С.А.* Студенческие математические олимпиады на Общественном факультете ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова // Морское образование: традиции, реалии и перспективы: сб. ст. науч.-практ. конф. СПб.: Изд-во ГУМРФ, 2015. Т.1. С. 166–171.
5. *Старостина С.А.* Студенческие математические олимпиады на Общественном факультете института «Морская академия» ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова в 2015-2016 учебном году // Сб. науч. тр. профессорско-преподавательского состава Гос. ун-та морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. СПб.: Изд-во ГУМРФ, 2016. С. 335–339.
6. *Гулевич Н.М.* Олимпиада первокурсников ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова по элементарной математике / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, С.А. Старостина // Сб. науч. ст. нац. науч.-практ. конф. профессорско-преподавательского состава ФГБОУ ВО "ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова". СПб., 2018. Т.1. С. 124–128.
7. *Старостина С.А.* Дистанционная олимпиада первокурсников / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, Н.М. Кубенский // Информационные технологии в современном инженерном образовании: сб. тр. межвуз. науч.-практ. конф. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2020. С. 216–223.
8. *Старостина С.А.* Дистанционная олимпиада первокурсников ГУМРФ по элементарной математике в 2020 году / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Сб. науч. ст. нац. науч.-практ. конф. профессорско-преподавательского состава ФГБОУ ВО "ГУМРФ им. адмирала С. О. Макарова". СПб., 2020. С. 314–319.
9. *Старостина С.А.* Методика подбора задач для дистанционной олимпиады по высшей математике и критерий оценивания их решений / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Специальная техника и технологии транспорта: сб. статей Военного института (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2020. Вып. 6. С. 260–268.
10. *Старостина С.А.* Дистанционная олимпиада ГУМРФ по высшей математике в 2021 году. Многовариантность решений / С.А. Старостина, Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов, Л.В. Белякова // Специальная техника и технологии транспорта: сб. ст. Военного института (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО им. генерала армии А.В. Хрулева. СПб.: Изд-во ВИ (ЖДВ и ВОСО) ВА МТО, 2021. Вып. 11. С. 201–211.

УДК 51:378.147

**А. И. Бурцев, М. А. Башкин, А. В. Васильева, Л. В. Березина**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: [byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru), [m\\_bashkin@list.ru](mailto:m_bashkin@list.ru),  
[vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net)

## **ЗАДАЧИ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ, ПОСВЯЩЕННОЙ 950-ЛЕТИЮ г. РЫБИНСКА**

*В статье представлены задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска, проводимой ФГБОУ ВО "Рыбинский государственный авиационный технический университет им. П.А. Соловьева" совместно с ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет» на базе РГАТУ им. П.А. Соловьева.*

**Ключевые слова:** олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка

**A. I. Burzev, M. A. Bashkin, A. V. Vasileva, L. V. Berezina**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: [byrzev@rsatu.ru](mailto:byrzev@rsatu.ru), [m\\_bashkin@list.ru](mailto:m_bashkin@list.ru), [vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru), [berezina\\_lv@pisem.net](mailto:berezina_lv@pisem.net)

## **TASKS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIAD IN MATHEMATICS, DEDICATED TO THE 950th ANNIVERSARY OF RYBINSK**

*The article presents the tasks of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, dedicated to the 950th anniversary of the city of Rybinsk, held by the P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University together with the Yaroslavl State Technical University on the basis of the P.A. Solovyov State State Technical University.*

**Keywords:** olympiad problems, scientific creativity of students, mathematical training

4 декабря 2021 года на базе РГАТУ им. П.А. Соловьева состоялась Всероссийская студенческая олимпиада по математике, посвященная 950-летию г. Рыбинска среди студентов и курсантов высших военных училищ всех специальностей и направлений подготовки. Это уже пятая крупная олимпиада, проводимая в Рыбинске [1], но на этот раз организаторами олимпиады стали совместно Рыбинский государственный авиационный

технический университет им. П.А. Соловьева и Ярославский государственный технический университет. Конкурсные задания, по уже сложившейся традиции, были сформулированы по номинациям: для студентов первого и старших курсов. Приводим олимпиадные задания и решения некоторых из них.

### Задачи для студентов 1-го курса

**Задача 1.** (ЯГТУ). Сравните числа  $(\sin 2)^{\sin 3}$  и  $(\sin 3)^{\sin 2}$ , не используя калькулятор.

**Ответ:**  $(\sin 3)^{\sin 2} < (\sin 2)^{\sin 3}$ .

**Задача 2.** (РГАТУ). Найдите действительные решения системы

уравнений: 
$$\begin{cases} 2 - y^2 - \sqrt{x + y} = 0, \\ y^2 + 5x + \sqrt{3x + 3y - 12} = 20. \end{cases}$$

**Ответ:**  $(4, 0)$ .

**Задача 3.** (РГАТУ). Решите неравенство  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 > 0$ .

**Ответ:**  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**Задача 4.** (РГАТУ). Найдите площадь треугольника, сторонами которого являются касательные к графику функции  $y = 4 - x^2$ , проходящие через точку  $(0, 5)$  и прямая  $BC$ , имеющая уравнение  $2x - 3y + 7 = 0$ .

**Ответ:** площадь равна 4 ед.кв.

**Задача 5.** (РГАТУ). Действительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условиям  $a + b + c = 2, ab + ac + bc = 1$ . Найдите наибольшее значение произведения  $abc$ .

**Ответ:**  $abc = \frac{4}{27}$ .

**Задача 6.** (РГАТУ). Пусть

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x+2 & 4 & 2 \\ 2 & x+2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & x \end{vmatrix}.$$

Решите уравнение  $f(x) = -432$ .

**Ответ:** Нет решений.

**Задача 7.** (РГАТУ). Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

дифференцируема в точке  $x = 0$ . Найти  $f'(x)$  и доказать, что  $f'(x)$  непрерывна на всей числовой прямой.

**Задача 8.** (РГАТУ). Решите уравнение  $z^4 = \left(\bar{z}\right)^3$ .  $z \in \mathbb{C}$ , где  $\mathbb{C}$  – множество комплексных чисел.

**Ответ:**  $z = e^{\frac{ik}{7}}$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $z = 0$ .

**Задача 9.** (РГАТУ). Точка  $A(-2, -7)$  является вершиной треугольника  $ABC$ . Биссектрисы треугольника имеют уравнения  $2x + 11y + 6 = 0$  и  $9x - 13y + 27 = 0$ . Найти уравнение стороны треугольника, противолежащей вершине  $A$ .

**Ответ:**  $7x - 24y + 146 = 0$ .

**Задача 10.** (РГАТУ).  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – матрица с действительными

элементами, удовлетворяющая условиям  $AA^T = E$  и  $A^5 = E$ .  $E$  – единичная матрица. Найдите число таких матриц и все такие матрицы.

**Ответ:**  $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \end{pmatrix}$   $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,

число матриц равно пяти.

### Задачи для студентов 2-4-го курсов

**Задача 1.** (РГАТУ). Найти  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$ .

**Ответ:**  $\frac{\pi}{2}$ .

**Задача 2.** (РГАТУ). Действительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют условиям  $a + b + c = 2, ab + ac + bc = 1$ . Найдите наибольшее значение произведения  $abc$ .

**Ответ:**  $abc = \frac{4}{27}$ .

**Задача 3.** (РГАТУ).  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  – матрица с действительными элементами, удовлетворяющая условиям  $AA^T = E$  и  $A^5 = E$ , где  $E$  – единичная матрица. Найдите число таких матриц и все такие матрицы.

**Ответ:**  $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) & \sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \\ -\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) \end{pmatrix}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; число матриц

равно пяти.

**Задача 4.** (РГАТУ). Точка  $A(-2, -7)$  является вершиной треугольника  $ABC$ . Биссектрисы треугольника имеют уравнения  $2x + 11y + 6 = 0$  и  $9x - 13y + 27 = 0$ . Найдите уравнение стороны треугольника, противоположащей вершине  $A$ .

**Ответ:**  $7x - 24y + 146 = 0$ .

**Задача 5.** (РГАТУ). Найдите все упорядоченные пары  $(n, m)$  натуральных чисел  $n, m$  таких, что уравнение  $z^n = \bar{z}^m$  имеет (ровно) 2021 решение ( $z \in \mathbb{C}$ ).

**Ответ:**  $\{(1, 2019), (2, 2018), \dots, (1009, 1011), (1011, 1009), \dots, (2019, 1)\}$ .

**Задача 6.** (РГАТУ). Пусть

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x+2 & 4 & 2 \\ 2 & x+2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 & x \end{vmatrix}.$$

Решите неравенство:  $f(x) \leq -432$ .

**Ответ:** Нет решений.

**Задача 7.** (ЯГТУ). Решить задачу Коши:  $y' = \frac{x+e^y}{xe^y}$ ,  $y(1) = 0$ .

**Решение** (авторское решение):

Сделав замену  $e^y = z$ ,  $y = \ln z$ , получим уравнение  $z' = 1 + \frac{z}{x}$  и начальное условие  $z(1) = 1$ . Замена  $\frac{z}{x} = u$ ,  $z = ux$  приводит к уравнению  $u' = 1/x$  и начальному условию  $u(1) = 1$ . Так как начальное значение  $x = 1$ , а правая часть уравнения определена при  $x \neq 0$ , то искомое решение определено при  $x > 0$ . Следовательно,  $u = \ln x + 1$ ,  $y = \ln(x \ln x + x)$ .

**Ответ:**  $y = \ln(x \ln x + x)$ .

Приведем некоторые, на наш взгляд, интересные решения, предложенные участниками олимпиады.

**Первый вариант решения.** Так как решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(1) = 0$ , определено на интервале, не содержащем 0 и содержащем 1, то можно считать  $x > 0$ .

$$y' = \frac{x+e^y}{xe^y}, x > 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+e^y}{xe^y}, x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(x+e^y)dx - \frac{e^y}{x}dy = 0, x > 0.$$

$$P = \frac{1}{x} + \frac{e^y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^y}{x^2}. \quad Q = -\frac{e^y}{x} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^y}{x^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$$\Rightarrow \exists dz = \left( \frac{1}{x} + \frac{e^y}{x^2} \right) dx - \frac{e^y}{x} dy$$

$$\Rightarrow z = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{e^y}{x^2} \right) dx = \ln x - \frac{e^y}{x} + \varphi(y),$$

где  $-\frac{e^y}{x} + \varphi'(y) = -\frac{e^y}{x} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C_1 \Rightarrow z = \ln x - \frac{e^y}{x} + C_1.$

$$dz = 0 \Rightarrow z = C_2 \Rightarrow \ln x - \frac{e^y}{x} = C, \text{ где } C \in \mathbb{R}.$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow \ln(1) - \frac{e^0}{1} = C \Rightarrow C = -1.$$

$$\Rightarrow \ln x - \frac{e^y}{x} + 1 = 0, \quad e^y = x(\ln x + 1) \quad y = \ln(x \ln x + x).$$



**Второй вариант решения**

Так как начальное значение  $x = 1$ , а правая часть уравнения определена при  $x \neq 0$ , то искомое решение определено на некотором интервале положительной полуоси.

$$y' = \frac{x + e^y}{xe^y}, \quad y'xe^y - e^y = x \quad | : x^2,$$

$$\frac{y'xe^y - e^y}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad \frac{y'xe^y - (x')e^y}{x^2} = \frac{1}{x}, \quad \left(\frac{e^y}{x}\right)' = \frac{1}{x},$$

$$\frac{e^y}{x} = \ln x + C.$$

Используем начальное условие  $y(1) = 0$ :  $\frac{e^0}{1} = \ln 1 + C, C = 1$ .

Для искомого решения  $e^y = x(\ln x + 1)$ ,  $y = \ln(x(\ln x + 1))$ .

**Ответ:**  $y = \ln(x(\ln x + 1))$ .

**Задача 8.** (РГАТУ). Найдите  $\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy$ , где область  $D$  задана неравенствами  $x^2 + y^2 \leq 1, y + x\sqrt{3} \geq 0, y \geq 0$ .

**Ответ:**  $\iint_D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dx dy = \frac{\pi^2}{36}$ .

**Задача 9.** (РГАТУ). Определим функцию  $\operatorname{potolok}(x) = n$  – наименьшее целое число такое, что  $n \geq x$ . Докажите, что  $\operatorname{potolok} \left( (2 + \sqrt{3})^n \right)$  – четное число.

**Задача 10.** (РГАТУ). Найдите сумму ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(n+1)!}$ .

**Ответ:**  $e^{\cos x} \sin(\sin x - x) + \sin x$ .

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Башкин М.А. Задачи IV межрегиональной студенческой олимпиады по математике (II этапа Всероссийской студенческой олимпиады) / М.А. Башкин, А.И. Бурцев, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 14. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2019. С. 61–73.

УДК 51:378.147

**А. И. Бурцев, М. А. Башкин, Л. В. Березина, А. В. Васильева**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П.А. Соловьева

Россия, г. Рыбинск, e-mail: byrzev@rsatu.ru, m\_bashkin@list.ru,  
berезина\_lv@pisem.net, vasileva@rsatu.ru

## **АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ**

*В статье представлен статистический анализ результатов Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска, проводимой ФГБОУ ВО "Рыбинский государственный авиационный технический университет имени П.А. Соловьева" совместно с ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет».*

**Ключевые слова:** олимпиадные задачи, научное творчество студентов, математическая подготовка

**A. I. Burzev, M. A. Bashkin, L. V. Berezina, A. V. Vasileva**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: byrzev@rsatu.ru, m\_bashkin@list.ru,  
berезина\_lv@pisem.net, vasileva@rsatu.ru

## **ANALYSIS OF THE RESULTS OF SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS**

*The article presents a statistical analysis of the results of the All-Russian Student Olympiad in Mathematics, dedicated to the 950th anniversary of the city of Rybinsk, conducted by the P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University together with the Yaroslavl State Technical University.*

**Keywords:** olympiad problems, scientific creativity of students, mathematical training

В начале декабря 2021 года РГАТУ им. П.А. Соловьева совместно с Ярославским государственным техническим университетом проводилась Всероссийская студенческая олимпиада по математике, посвященная 950-летию г. Рыбинска среди студентов и курсантов высших военных училищ всех специальностей и направлений подготовки. Для анализа результатов

олимпиады была проведена статистическая обработка полученных данных. Первокурсникам и более старшим курсам (2-5) были предложены разные варианты заданий [1]. Результаты подводились отдельно по каждой номинации.

Чтобы оценить уровень решаемости задач, предложенных участникам олимпиады, были проведены расчеты процентного количества участников, набравших не менее 8 баллов за задачу из 10 возможных (табл. 1 и 2) и не более 2 баллов за задачу (табл. 3 и 4).

**Таблица 1. Процентное количество участников (первый курс), набравших не менее 8 баллов за задачу**

Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средний балл
Курсанты военных специальностей	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10,33
Физико-математические специальности	30	30	60	60	10	20	0	10	0	10	32,4
Технические специальности	13	6	13	19	0	6	13	0	0	0	12,38
Все участники	17	14	28	31	3	10	7	7	3	7	19,07

**Таблица 2. Процентное количество участников (старшие курсы), набравших не менее 8 баллов за задачу**

Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Средний балл
Курсанты военных специальностей	15	5	0	5	0	15	25	5	5	15	28,65
Физико-математические специальности	50	25	42	8	17	33	42	8	8	17	28,83
Технические специальности	11	11	0	0	0	11	0	0	0	0	10
Все участники	39	12	15	2	7	34	44	5	7	15	24,61

Для удобства сравнения результаты представлены на диаграммах (рис. 1 и 2.)

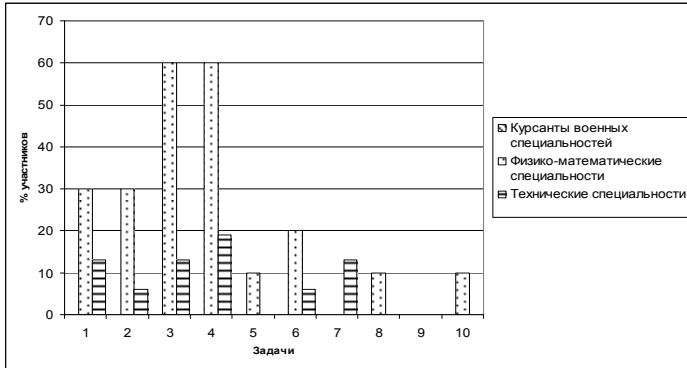


Рис. 1. Диаграмма распределения процентного количества участников первого курса, набравших не менее 8 баллов за задачу

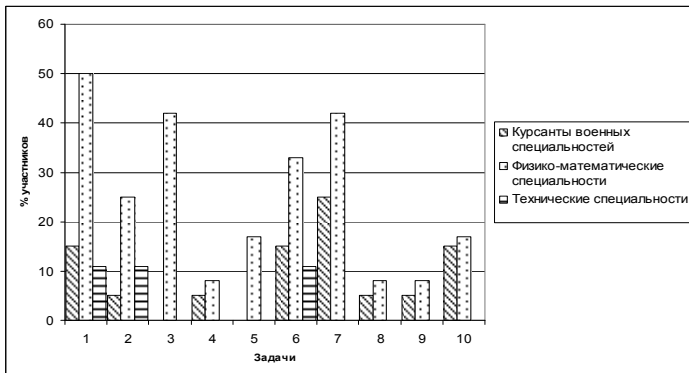


Рис. 2. Диаграмма распределения процентного количества участников старших курсов, набравших не менее 8 баллов за задачу

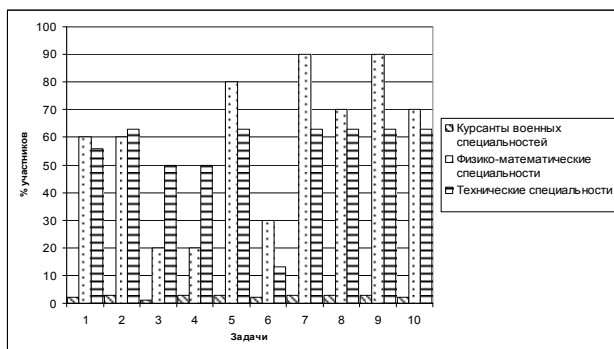
Таблица 3. Процентное количество участников (первый курс), набравших не более 2 баллов за задачу

Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Курсанты военных специальностей	2	3	1	3	3	2	3	3	3	2
Физико-математические специальности	60	60	20	20	80	30	90	70	90	70
Технические специальности	56	63	50	50	63	13	63	63	63	63
Все участники	72	83	55	52	93	34	86	90	97	79

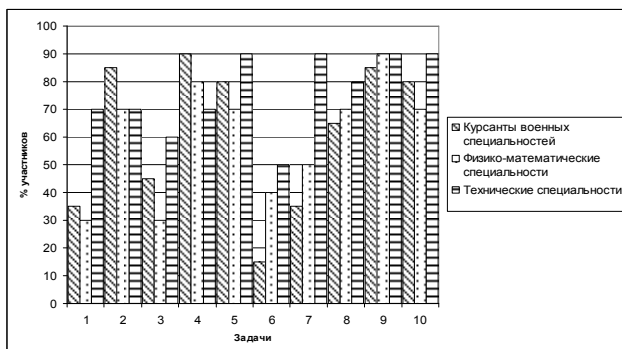
**Таблица 4. Процентное количество участников (старшие курсы), набравших не более 2 баллов за задачу**

Задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Курсанты военных специальностей	35	85	45	90	80	15	35	65	85	80
Физико-математические специальности	30	70	30	80	70	40	50	70	90	70
Технические специальности	70	70	60	70	90	50	90	80	90	90
Все участники	44	80	49	85	83	34	56	73	90	83

Результаты расчетов также представлены на диаграммах (рис. 3 и 4).



**Рис. 3. Диаграмма распределения процентного количества участников первого курса, набравших не более 2 баллов за задачу**



**Рис. 4. Диаграмма распределения процентного количества участников старших курсов, набравших не более 2 баллов за задачу**

Анализ результатов решения задач первокурсниками показывает, что большинство курсантов высших военных училищ не смогли набрать 8 и более баллов за задачу, но при этом практически все курсанты пробовали решать все задачи и набрали по каждой задаче больше 2 баллов. Первокурсники физико-математических специальностей в среднем показали значительно более хороший результат, чем остальные участники.

Рассмотрим результаты участников, представлявших старшие курсы.

Первая задача планировалась авторами как утешительная, то есть простая задача, с которой должны справиться почти все участники. На самом деле, задача оказалась простой только для студентов физико-математических специальностей. Представители военных учебных заведений и студенты технических специальностей гражданских вузов справились с данной задачей гораздо хуже.

Четвертая задача. Эта задача из раздела высшей математики «Аналитическая геометрия». Задача предполагала стандартное, но достаточно объемное решение. При этом она оказалась наиболее сложной для всех участников. Хотя авторы предполагали, что задача не вызовет больших затруднений.

Пятая задача. Эта задача относилась к разделу «Комплексные числа» и авторы рассчитывали, что с ней справится большинство участников. Однако же задача оказалась по силам только студентам физико-математических специальностей.

При анализе результатов олимпиады было решено оценить, сколько задач участники пробовали решать, даже если не всегда было приведено полное решение или решение было целиком правильное. Для этого по каждому участнику было подсчитано количество задач, оцененных жюри в 3 и более балла. Результаты представлены на диаграммах (рис. 5 и 6).

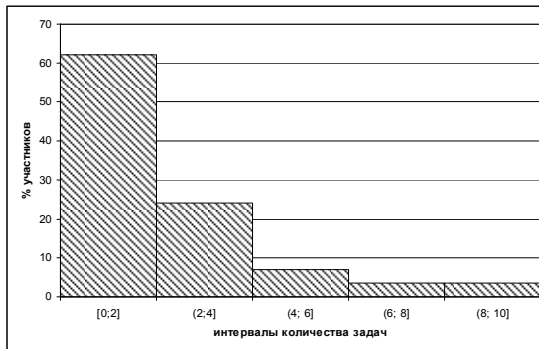
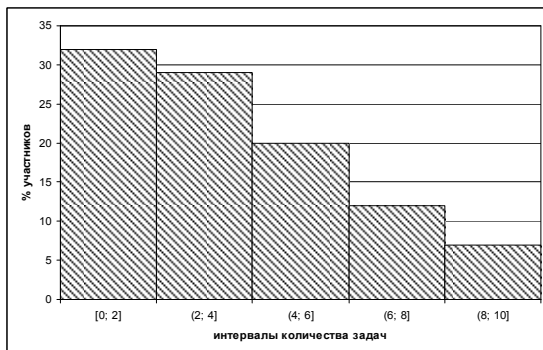


Рис. 5. Диаграмма распределения процентного количества участников первого курса решавших определенное число задач



**Рис. 6.** Диаграмма распределения процентного количества участников старших курсов, решавших определенное число задач

Более 60% первокурсников пробовали решать 1-2 задачи. Менее 10% представителей первого курса решали 7 задач и более.

Более 30% участников старших курсов решали одну – две задачи. Чуть меньше 30% участников пробовали решать 3-4 задачи. И только 7% участников решали 9 или все 10 задач из предложенного варианта. Таким образом, около 40% студентов, принимавших участие в олимпиаде, решали (хотя и не всегда на полный балл) половину задач или больше.

Более 30% участников брались за решение не более чем двух задач. Около 30% студентов решали 3-4 задачи. И только 10% участников решали 9-10 задач из 10 предложенных.

Проводился анализ суммарного числа баллов за каждую работу. Имеющиеся данные представлены в виде интервального ряда отдельно для первокурсников (табл. 5) и студентов старших курсов (табл. 6). Число участников, набравших баллы, принадлежащие каждому из интервалов, оценивалось в процентах от общего числа студентов, принимавших участие в олимпиаде.

**Таблица 5.** Распределение баллов, набранных участниками (первый курс)

№ интервала	Интервал баллов	Количество участников, набравших баллы из интервала, %
1	[0; 10]	41
2	(10; 20]	24
3	(20; 30]	10
4	(30; 40]	14
5	(40; 50]	7
6	(50; 60]	3
7	(60; 70]	3

Таблица 6. Распределение баллов, набранных участниками (старшие курсы)

№ интервала	Интервал баллов	Количество участников, набравших баллы из интервала, %
1	[0; 10]	34
2	(10; 20]	24
3	(20; 30]	10
4	(30; 40]	7
5	(40; 50]	5
6	(50; 60]	12
7	(60; 70]	5
8	(70; 80]	2

Для наглядности данные таблицы представлены на диаграммах (рис. 7 и 8).

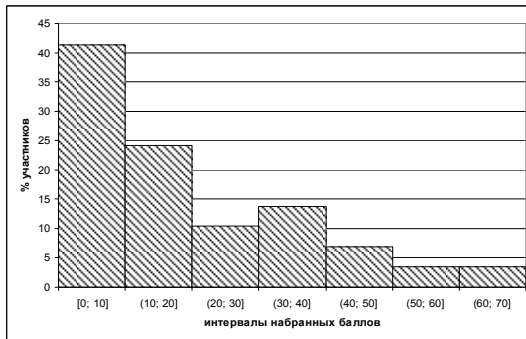


Рис. 7. Диаграмма распределения процентного количества участников первого курса по количеству набранных баллов

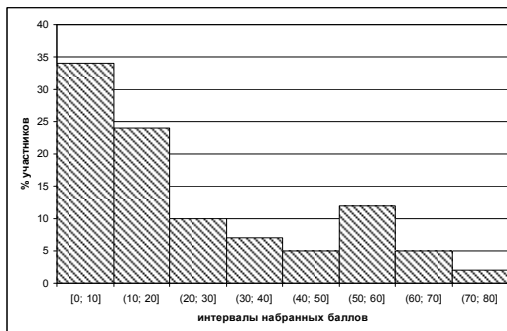


Рис. 8. Диаграмма распределения процентного количества участников старших курсов по количеству набранных баллов



Чуть более 40% студентов первого курса набрали не больше 10 баллов за работу. Менее 10% участников набрали 70 баллов и больше.

Анализ таблицы и диаграммы показывает, что около 35% студентов старших курсов набрали не более 10 баллов. Чуть меньше 25% участников набрали больше 50 баллов из 100 возможных.

Результаты олимпиады показали, что у большинства студентов есть пробелы в знаниях по следующим разделам: аналитическая геометрия, действий с комплексными числами и функции комплексного переменного.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурцев А.И.* Задачи Всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска / А.И. Бурцев, М.А. Башкин, А.В. Васильева, Л.В. Березина // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 51-56.

УДК 51:378.147

**К. В. Бухенский, А. И. Новиков, А. С. Сафошкин**

Рязанский государственный радиотехнический университет  
им. В.Ф. Уткина  
Россия, г. Рязань, e-mail: *bukhensky.k.v@rsreu.ru*,  
*novikovanatoly@yandex.ru*, *safoshkin.a.s@rsreu.ru*

## **ОБ ИСТОРИИ СТУДЕНЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД В РГРТУ**

*В статье рассказывается история студенческих математических олимпиад в РГРТУ с советских времен и до настоящего момента.*

**Ключевые слова:** *студенческая олимпиада, математическая олимпиада*

**K. V. Bukhensky, A. I. Novikov, A. S. Safoshkin**

V.F. Utkin Ryazan State Radio Engineering University  
Russia, Ryazan, e-mail: *bukhensky.k.v@rsreu.ru*,  
*novikovanatoly@yandex.ru*, *safoshkin.a.s@rsreu.ru*

## **ABOUT THE HISTORY OF STUDENT MATHEMATICAL OLYMPIADS AT THE RYAZAN STATE RADIO ENGINEERING UNIVERSITY**

*The paper tells the history of student mathematical olympiads at the Ryazan State Radio Engineering University from Soviet times to the present.*

**Keywords:** *student olympiad, mathematical olympiad*

В советский период студенческие олимпиады по математике в Рязанском радиотехническом институте проводились едва ли ни с момента его основания (1951 г.). Хотя более значимым для студентов в те годы считалось участие в ежегодных студенческих научно-технических конференциях (СНТК). Они традиционно проводились 12 апреля и вызывали неподдельный интерес у студентов. Участие в СНТК было маленькой ступенькой перед входом в большую науку. Во время обсуждения докладов часто разгорались нешуточные споры.

В начале 2000-х годов студенческие олимпиады по математике в РГРТА (с 1994 года институт получил статус государственной радиотехнической академии) стали межвузовскими. В них принимали участие студенты всех рязанских вузов и военных училищ. Олимпиады активно под-

держивались областным управлением образования. Совместно с ним было разработано положение о межвузовских олимпиадах. Самое активное участие в продвижении идеи межвузовских олимпиад принимал начальник областного управления образования А.Д. Канунников. Он старался присутствовать на открытии олимпиад и на вручении дипломов и подарков победителям олимпиад.

Спонсорами олимпиад были различные промышленные предприятия города Рязани. Несмотря на то что это были уже негосударственные предприятия – АО (акционерные общества) и ООО (общества с ограниченной ответственностью) – руководители некоторых из них, в первую очередь предприятий радиоэлектронной промышленности, понимали важность подготовки будущих специалистов.

Первая олимпиада по математике регионального уровня в вузе состоялась в 2006 году.

С 2013 года в межвузовских олимпиадах РГРТУ начали принимать участие студенты ярославских вузов (Ярославский государственный технический университет и Ярославский филиал МЭСИ). В 2014 году к олимпиаде присоединились студенты Обнинского института атомной энергетики ИАТЭ НИЯУ МИФИ (г. Обнинск, Калужская область) и курсанты Военной академии воздушно-космической обороны им. Г.К. Жукова (г. Тверь). География участников олимпиады с каждым годом продолжала расширяться: в 2015 году дебютировал Рыбинский авиационно-технический университет им. П.А. Соловьева (г. Рыбинск, Ярославская область), в 2016 году – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (г. Москва), количество участников V Межрегиональной Олимпиады в 2016 году превысило 100 человек. В 2017 году количество команд из других регионов превысило количество команд, представляющих вузы Рязани. К олимпиаде присоединились НИУ МГСУ (г. Москва), СамГТУ (г. Самара), ФВА РВСН (г. Серпухов, Московская область), ТИУ (г. Тюмень).

С 2018 года олимпиада стала носить имя профессора кафедры электровакуумной техники Рязанского радиотехнического института с 1966 по 1994 г., доктора физико-математических наук Георгия Николаевича Шуппе. Финансовую поддержку олимпиаде оказали ОАО «РКБ «Глобус» (г. Рязань) и ООО «Маркетплейс» (г. Москва). В VII Межрегиональной студенческой физико-математической олимпиаде им. Г.Н. Шуппе приняло участие более 150 студентов и курсантов из 19 вузов, к которым помимо постоянных участников присоединились команды РТУ МИРЭА (г. Москва), ВА РВСН (г. Москва), а также команда Луганского национального университета им. Тараса Шевченко (г. Луганск). В 2019 году участниками олимпиады стали студенты КУБГУ (г. Краснодар), СПбГЭУ (г. Санкт-

Петербург) и ЗаБИЖТ ИрГУПС (г. Чита, Забайкальский край). В 2020 году в Олимпиаде приняли участие студенты из 21 вуза, в том числе ЯВВУ ПВО (г. Ярославль), НИУ МАИ (г. Москва), Академия ФСО России (г. Орел).

Юбилейная, X Межрегиональная студенческая физико-математическая олимпиада им. Г.Н. Шуппе состоялась 12-14 марта 2021 года в смешанном формате, часть студентов участвовала в олимпиаде дистанционно с использованием современных онлайн-технологий. Список вузов-участников вновь обновился: среди 23 команд были представители ВГСПУ (г. Волгоград), КГУ (г. Кострома), НГТУ (г. Новосибирск), НИ ТГУ (г. Томск).

среди отличительных особенностей олимпиад, проводимых в РГРТУ, можно выделить как наличие физических задач, требующих серьезного знания математического аппарата, так и присутствие «задач-ловушек», которые позволяют определить не только умение студентов применять свои знания, но и способность увидеть в задаче особенность, которая в корне меняет подход к решению. Кроме того, авторы достаточно часто предлагают студентам задания из цикла школьных олимпиад различного уровня, которые требуют творческого и нестандартного подхода, отличного от «классических» студенческих задач.

**Пример 1** (Межрегиональная олимпиада, 2016 год). Найти производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , если  $z = \sqrt{x^2 + y^2} \ln \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Данная задача является «задачей-ловушкой»: Поскольку уравнение  $\ln \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$  не имеет решений, то оно *не задает* неявную функцию  $z = z(x, y)$ . Студенты, указавшие в решении, что неявная функция не существует, получили дополнительные баллы за задачу и специальный диплом.

**Пример 2** (2021 год). Основной причиной понижения температуры с высотой в атмосфере является адиабатическое расширение восходящих потоков воздуха. Используя уравнение адиабаты  $pV^\gamma = \text{const}$ , где  $\gamma = 1,4$ , найти изменение температуры с высотой. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ , молекулярный вес воздуха  $M = 29 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}$ .

**Пример 3** (2017 год). Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ . Найти  $\exp(A)$ .

Решения предложенных задач представлены на странице кафедры высшей математики РГРТУ [1].

Студенты РГРТУ принимают активное участие в межрегиональных, всероссийских и международных математических олимпиадах. Так, с 2010 года команды РГРТУ занимали призовые места на олимпиадах, которые проходили на базе УГАТУ (г. Уфа), МФТИ (г. Долгопрудный), ЯГТУ (г. Ярославль), РГАТУ (г. Рыбинск, Ярославская область), БРУ (г. Могилев, Республика Беларусь), ВА РХБЗ (г. Кострома), ИТМО (г. Санкт-Петербург), ЮРГПУ (НПИ) (г. Новочеркасск, Ростовская область), а также в иных математических соревнованиях. Одной из причин успешного выступления студентов РГРТУ является проведение еженедельного физико-математического семинара, посвященного решению задач повышенной трудности и подготовке к олимпиадам. Руководителями семинара являются доцент кафедры ВМ, к.ф.-м.н., Дюбуа Александр Борисович и старший преподаватель кафедры ВМ Сафошкин Алексей Сергеевич.

При подготовке студентов активно используются материалы, подготовленные коллективом преподавателей и студентов кафедры высшей математики РГРТУ, а также коллег из других вузов. В настоящее время опубликованы три части учебного пособия «Студенческие математические олимпиады» [2–4], ведется подготовка четвертой и пятой частей.

В апреле 2022 года в РГРТУ планируется проведение Всероссийской студенческой физико-математической олимпиады им. Г.Н. Шуппе. Подробная информация об олимпиадах, в которых принимают участие студенты РГРТУ, а также олимпиадах, проводимых на базе РГРТУ, представлена на странице кафедры высшей математики РГРТУ [1]

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Студенческие олимпиады / Рязанский гос. радиотехн. ун-т им. В.Ф. Уткина: сайт. URL: <http://www.rsreu.ru/faculties/faitu/kafedri/vm/studencheskie-olimpiady>
2. Студенческие математические олимпиады. Ч. 1: учебное пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, М.А. Зилотова, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин. Рыбинск: РГРТУ, 2014. 128 с.
3. Студенческие математические олимпиады. Ч. 2: учебное пособие / В.А. Амбарцумян, Е.А. Андрющенко, К.В. Бухенский, Е.А. Дворецкова, А.Б. Дюбуа, С.Н. Машнина, А.С. Сафошкин. Рыбинск: РГРТУ, 2015. 96 с.
4. Студенческие математические олимпиады. Ч. 3: учебное пособие / К.В. Бухенский, А.Б. Дюбуа, А.Н. Конюхов, С.И. Кучерявый, С.Н. Машнина, Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг, А.С. Сафошкин. Рыбинск: РГРТУ, 2017. 84 с.

УДК 681.3.068:378.147

**Г. С. Гохберг**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: genagoh@yandex.ru

## **РЕАЛИЗАЦИЯ РАСШИРЕНИЯ ДЛЯ УДАЛЕННОГО ЗАПОЛНЕНИЯ ДОКУМЕНТОВ В СРЕДЕ «1С:ПРЕДПРИЯТИЕ»**

*Рассматривается организация механизма удаленного формирования документов в среде «1С:Предприятие» в условиях защищенной конфигурации и ограничения доступа пользователей к базе данных. Подход может использоваться при обучении технологии разработки программных средств в курсах программной инженерии для специалистов и магистров.*

**Ключевые слова:** 1С:Предприятие, расширение 1С, ограничение доступа, конфигурация 1С

**G. S. Gokhberg**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: genagoh@yandex.ru

## **IMPLEMENTATION OF THE EXTENSION FOR REMOTE DOCUMENTS FILLING IN THE «1С:ENTERPRISE» SYSTEM**

*The organization of the mechanism of remote document generation in the 1С:Enterprise system in the conditions of a protected configuration and restriction of user access to the database. The approach can be used when teaching software development technology in software engineering courses for specialists and masters.*

**Keywords:** 1С:Enterprise, 1С extension, access restriction, 1С configuration

В условиях многопользовательской работы в среде «1С:Предприятие» часто возникают задачи, связанные с необходимостью формирования хозяйственных документов в удаленных точках локальной сети, в условиях низкой квалификации и частой сменяемости персонала. Если подобный механизм ввода документов не был изначально реализован в имеющейся типовой или отраслевой конфигурации «1С:Предприятие», то подобная задача становится неочевидной.

В работе рассматривается реализация в среде «1С:Предприятие» механизма формирования документов при следующих ограничениях:

- Требуется ввод и заполнение некоторого предустановленного вида документа из различных узлов сети большим количеством неквалифицированных пользователей, которые не должны иметь доступа к другим объектам конфигурации;
- Работа по формированию указанного документа осуществляется на регулярной основе с заданной периодичностью;
- В конфигурации отсутствуют требуемые ограничения на работу с документами данного вида;
- Конфигурация находится на поддержке и защищена от изменений;

При решении задачи подобного типа одной из проблем является необходимость ограничить доступ пользователей к защищаемым объектам конфигурации как для изменений, так и для просмотра. При разработке новой конфигурации эта задача решается стандартными средствами разработки «1С:Предприятие» [1], однако в условиях описанных выше ограничений это становится невозможным.

Для решения задачи был использован механизм расширений конфигурации 1С, реализованный в версиях 1С, начиная с 8.3.16 [2] и позволяющий создавать дополнительные объекты без изменения основной конфигурации и снятия ее с поддержки.

Решение задачи базируется на идее известного паттерна проектирования «фасад» [3]:

- Выделяются пользователи, имеющие доступ к объектам конфигурации, предусмотренный разработчиками – **«базовые пользователи»**, и пользователи, которые будут работать только с предустановленным видом документа – **«удаленные пользователи»**.
- Создается специальный вид документа – **«заявка»**, «обращенный» к «удаленным пользователям», который включается в расширение.
- Для «удаленных пользователей» права ограничиваются доступом к «заявке» с разделением доступа по подразделениям принадлежности пользователя.
- Создается и реализуется алгоритм взаимодействия документа «заявка» со стандартными объектами конфигурации.

Структурная схема описанной структуры представлена на рис. 1.

Взаимодействие документа «заявка» с объектами основной конфигурации реализуется по следующему алгоритму:

- введенный «удаленным пользователем» документ «заявка» сохраняется в базе данных;
- по мере необходимости автоматически осуществляется перенос требуемых данных из документов «заявка» в стандартные объекты конфигурации.

Перенос данных в стандартные объекты может осуществляться разными способами в зависимости от специфики конкретной задачи:

- 1) в рамках регламентного задания по расписанию;
- 2) принудительно по требованию «базового пользователя»;
- 3) при каждом случае необходимости использования данных документа в рабочем процессе основной конфигурации.

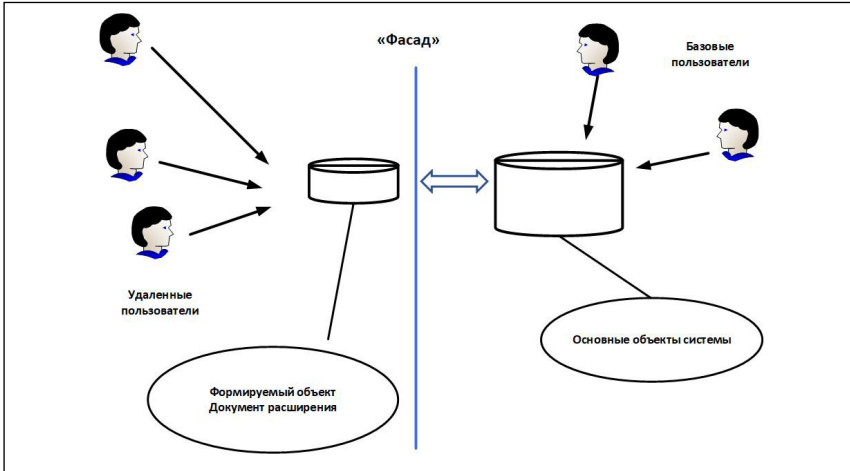


Рис. 1. Структурная схема организации взаимодействия

В процессе работы был использован последний механизм, так как специфика фактической работы используемой конфигурации предполагает периодическое выполнение обработки данных с интенсивностью 1 раз в сутки. Использовался подход, состоящий в том, что при необходимости проведения расчетов за период сначала осуществлялось преобразование данных из всех «заявок» за этот период в соответствующие документы базовой конфигурации за этот период, а затем выполнялся стандартный механизм обработки данных, имеющийся в исходной конфигурации.

Работа «удаленных пользователей» ограничивается не только доступом к данным, но также временными и организационными изменениями: после осуществления переноса данных в объекты базовой конфигурации доступ на изменения в соответствующие документы «заявка» закрывается. Это необходимо для исключения конфликтов синхронизации данных и возможности занесения данных «базовыми пользователями» непосредственно в объекты исходной конфигурации, как это было предусмотрено в исходной конфигурации.



Описанный механизм был реализован при работе с типовой конфигурацией по учету питания пациентов в стационаре «IC:Медицина. Диетическое питание, редакция 2» [4] для обеспечения ввода заявок на питание непосредственно из лечебных отделений. В этом случае заявки заполняются не работниками службы питания, имеющими доступ ко всем ресурсам системы, а ответственными медицинскими работниками отделений, которые и рассматриваются как «удаленные пользователи». В типовой конфигурации не предусмотрено разделение доступа пользователей к формированию заявок по отделениям, что не дает непосредственной возможности удаленного ввода заявок из отделений.

На рис. 2 представлены интерфейс входа в систему для «базовых пользователей», предусмотренный типовой конфигурацией, и интерфейс входа для «удаленных пользователей», реализованный в рамках рассмотренной схемы.

### **Рис. 2. Вид интерфейса входа для разных типов пользователей**

«Удаленный пользователь» имеет доступ к «заявке» и работает только с этим объектом. Структура объекта включает все реквизиты базовых объектов, для которых предназначен документ, и ряд дополнительных служебных реквизитов, среди которых есть, например, реквизит состояния «заявки». Этот реквизит отвечает за обеспечение синхронизации данных.

В рассматриваемом решении он имеет следующие predetermined значения:

- *Оформляется* – идет заполнение документа пользователем.
- *Подготовлена* – заполнение документа завершено.
- *Проверена* – данные заполнения проверены.
- *Возвращена* – данные не прошли проверку и требуется корректировка.
- *Закрыта* – данные перенесены в базовые объекты.

Описанный подход может быть использован при организации учебных занятий по курсам технологии разработки программного обеспечения и программной инженерии как реальный пример применения классических шаблонов проектирования в среде разработчика «1С:Предприятие».

В дальнейшем данный пример может быть расширен для использования других шаблонов проектирования (например, «наблюдатель» «декоратор»), что даст возможность использовать в обучении реальные примеры разработки в одной из самых распространенных средах разработки прикладного программного обеспечения

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 1С:Предприятие 8.3: Руководство разработчика. М.: 1С-Софт, 2015. 754 с.
2. Архитектура платформы 1С:Предприятие (версия 8.3.21). URL: <https://v8.1c.ru/platforma/rasshireniya>
3. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования / Э. Гамма, Р. Хелм, Р. Джонсон, Д. Влиссидес. СПб.: Питер, 2015. 368 с.
4. 1С:Медицина. Диетическое питание. М.: 1С, 2018. 273 с.

УДК 519.6:378.147

**А. Н. Жаров, И. Г. Минеичева**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: zharovan@ystu.ru, mineichevaig@ystu.ru

## **ОБ ИЗЛОЖЕНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

*Рассматривается методика изложения темы метод конечных элементов для расчета стержневых систем. Показано, что для осмысленного изучения метода конечных элементов слушатели должны знать основные понятия теории дифференциальных уравнений, метод Галеркина и основы линейной алгебры.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, приближенные методы расчета стержневых систем

**A. N. Zharov, I. G. Mineicheva**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: zharovan@ystu, mineichevaig@ystu.ru

## **ABOUT THE PRESENTATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR THE CALCULATION OF DEFORMATIONS IN ROD SYSTEMS**

*The method of presenting the topic of the finite element method for the calculation of rod systems is considered. It is shown that for a meaningful study of the finite element method, students should know the basic concepts of the theory of differential equations, the Galerkin method and the basics of linear algebra.*

**Keywords:** finite element method, approximate methods for calculating rod systems

Метод конечных элементов является приближенным методом решения дифференциальных уравнений [1-3] и удачно применяется в области теории упругости, в задачах теплопроводности и диффузии, в гидродинамике, в задачах электромагнетизма, в задачах строительной механики. Он получил широкое распространение благодаря своей простоте и не плохой точности. В настоящее время этот метод заложен в большинство систем автоматического проектирования таких, как Autodesk Inventor, Solidworks, Ansys и других.

Основы метода конечных элементов были заложены в работах Галеркина, Релея и Ритца. Он является одним из проективных методов. Идеи данного метода рассмотрим на примере задачи о расчете деформаций в стержневых системах.

Рассмотрим стержень с площадью сечения  $A$  и длиной  $L$ , изготовленный из материала с модулем упругости  $E$ . Примем, что на стержень действуют сосредоточенные силы  $P_1$  и  $P_2$  и распределенная нагрузка  $q(x)$ . Перемещения в узлах 1 и 2 обозначим соответственно  $u_1$  и  $u_2$ , как это показано на рис. 1.

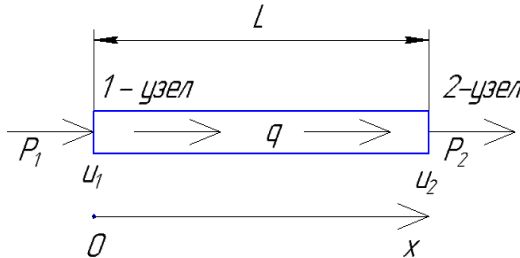


Рис. 1. Стержень и нагрузки, действующие на него

Деформация  $u(x)$  такого стержня описывается дифференциальным уравнением

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (1)$$

с естественными граничными условиями

$$E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = P_1, \quad E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = P_2 \quad (2)$$

и геометрическими условиями

$$u(0) = u_1, \quad u(L) = u_2. \quad (3)$$

Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде линейной функции

$$\hat{u}(x) = w_1(x) \cdot u_1 + w_2(x) \cdot u_2, \quad (4)$$

где  $w_1(x)$  и  $w_2(x)$  – весовые функции;  $u_1$  и  $u_2$  – деформации в узлах, которые подлежат определению.

Подставляя (4) в (3), получим систему

$$\begin{cases} w_1(0) \cdot u_1 + w_2(0) \cdot u_2 = u_1; \\ w_1(L) \cdot u_1 + w_2(L) \cdot u_2 = u_2, \end{cases} \quad (5)$$

которая будет верной в случае, если весовые функции удовлетворяют условиям

$$w_1(0) = 1, \quad w_1(L) = 0, \quad w_2(0) = 0, \quad w_2(L) = 1. \quad (6)$$

Выберем весовые функции  $w_1(x)$  и  $w_2(x)$  в виде

$$w_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad w_2(x) = \frac{x}{L}. \quad (7)$$

Невязка между приближенным  $\hat{u}(x)$  и точным  $u(x)$  решениями уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} + q(x) \right) - \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) \right) = \\ &= E \cdot A \cdot \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} + q(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения двух неизвестных  $u_1$  и  $u_2$  по методу Галеркина [1, 2] составим систему уравнений

$$\begin{cases} \int_0^L w_1(x) \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + q(x) \right) dx = 0; \\ \int_0^L w_2(x) \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + q(x) \right) dx = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Каждое из уравнений системы (9) проинтегрируем по частям, учитывая условия (6) и (2), перепишем ее в виде

$$\begin{cases} -P_1 - E \cdot A \cdot \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{dw_1(x)}{dx} dx = - \int_0^L w_1(x) q(x) dx; \\ P_2 - E \cdot A \cdot \int_0^L \frac{d\hat{u}}{dx} \cdot \frac{dw_2(x)}{dx} dx = - \int_0^L w_2(x) q(x) dx. \end{cases} \quad (10)$$

Для простоты дальнейшего рассмотрения примем, что  $q(x) = \text{const} = q$ . Подставив в систему (10) выражения (4) и (7), получим

$$\begin{cases} \frac{E \cdot A}{L} \cdot (u_1 - u_2) = \frac{qL}{2} - P_1; \\ \frac{E \cdot A}{L} \cdot (-u_1 + u_2) = \frac{qL}{2} + P_2. \end{cases} \quad (11)$$

Систему (11) перепишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & -\frac{E \cdot A}{L} \\ \frac{E \cdot A}{L} & -\frac{E \cdot A}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В выражении (12) матрицы имеют названия:

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & -\frac{E \cdot A}{L} \\ \frac{E \cdot A}{L} & \frac{E \cdot A}{L} \end{pmatrix} - \text{локальная матрица жесткости};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{Lq}{2} \\ \frac{Lq}{2} \end{pmatrix} - \text{энергетические эквивалентные нагрузки}.$$

Предположим теперь, что стержень разбит на три участка 4-мя точками, как это показано на рис. 2.

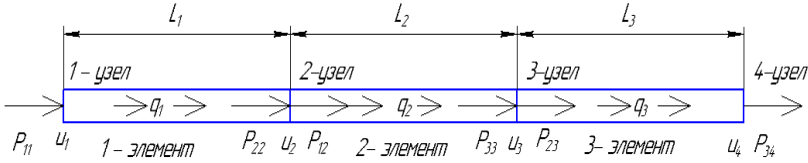


Рис. 2. Стержень, разделенный на три части

Тогда для каждого участка можно записать систему вида (12):  
для 1-го элемента

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A_1}{L_1} & -\frac{E \cdot A_1}{L_1} \\ \frac{E \cdot A_1}{L_1} & \frac{E \cdot A_1}{L_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 q_1}{2} \\ \frac{L_1 q_1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_{11} \\ P_{12} \end{pmatrix}; \quad (13)$$

для 2-го элемента

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A_2}{L_2} & -\frac{E \cdot A_2}{L_2} \\ \frac{E \cdot A_2}{L_2} & \frac{E \cdot A_2}{L_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_2 q_2}{2} \\ \frac{L_2 q_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_{22} \\ P_{23} \end{pmatrix}; \quad (14)$$

для 3-го элемента

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A_3}{L_3} & -\frac{E \cdot A_3}{L_3} \\ \frac{E \cdot A_3}{L_3} & \frac{E \cdot A_3}{L_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_3 q_3}{2} \\ \frac{L_3 q_3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P_{33} \\ P_{34} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Уравнения (13)-(15) в развернутом виде примут вид

$$\frac{E \cdot A_1}{L_1} u_1 - \frac{E \cdot A_1}{L_1} u_2 = \frac{L_1 q_1}{2} - P_{11}; \quad (16)$$

$$-\frac{E \cdot A_1}{L_1} u_1 + \frac{E \cdot A_1}{L_1} u_2 = \frac{L_1 q_1}{2} + P_{12}; \quad (17)$$

$$\frac{E \cdot A_2}{L_2} u_2 - \frac{E \cdot A_2}{L_2} u_3 = \frac{L_2 q_2}{2} - P_{22}; \quad (18)$$

$$-\frac{E \cdot A_2}{L_2} u_2 + \frac{E \cdot A_2}{L_2} u_3 = \frac{L_2 q_2}{2} + P_{23}; \quad (19)$$

$$\frac{E \cdot A_3}{L_3} u_3 - \frac{E \cdot A_3}{L_3} u_4 = \frac{L_3 q_3}{2} - P_{32}; \quad (20)$$

$$-\frac{E \cdot A_3}{L_3} u_3 + \frac{E \cdot A_3}{L_3} u_4 = \frac{L_3 q_3}{2} + P_{33}. \quad (21)$$

В системе (16)-(21) сложим уравнения (17) и (18), а также (19) и (20)

$$\frac{E \cdot A_1}{L_1} u_1 - \frac{E \cdot A_1}{L_1} u_2 = \frac{L_1 q_1}{2} - P_{11}; \quad (22)$$

$$-\frac{E \cdot A_1}{L_1} u_1 + \left( \frac{E \cdot A_1}{L_1} + \frac{E \cdot A_2}{L_2} \right) u_2 - \frac{E \cdot A_2}{L_2} u_3 = \frac{L_1 q_1}{2} + \frac{L_2 q_2}{2} + P_{12} - P_{22}; \quad (23)$$

$$-\frac{E \cdot A_2}{L_2} u_2 + \left( \frac{E \cdot A_2}{L_2} + \frac{E \cdot A_3}{L_3} \right) u_3 - \frac{E \cdot A_3}{L_3} u_4 = \frac{L_2 q_2}{2} + \frac{L_3 q_3}{2} + P_{23} - P_{32}; \quad (24)$$

$$-\frac{E \cdot A_3}{L_3} u_3 + \frac{E \cdot A_3}{L_3} u_4 = \frac{L_3 q_3}{2} + P_{33}. \quad (25)$$

Учитывая условия равновесия каждого элемента стержня

$$-P_{11} = F_1, \quad P_{12} - P_{22} = F_2, \quad P_{23} - P_{32} = F_3, \quad P_{33} = F_4, \quad (26)$$

перепишем систему (22)-(25) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \frac{E \cdot A_1}{L_1} & -\frac{E \cdot A_1}{L_1} & 0 & 0 \\ \frac{E \cdot A_1}{L_1} & \frac{E \cdot A_1}{L_1} + \frac{E \cdot A_2}{L_2} & -\frac{E \cdot A_2}{L_2} & 0 \\ 0 & -\frac{E \cdot A_2}{L_2} & \frac{E \cdot A_2}{L_2} + \frac{E \cdot A_3}{L_3} & -\frac{E \cdot A_3}{L_3} \\ 0 & 0 & -\frac{E \cdot A_3}{L_3} & \frac{E \cdot A_3}{L_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{L_1 q_1}{2} \\ \frac{L_1 q_1}{2} + \frac{L_2 q_2}{2} \\ \frac{L_2 q_2}{2} + \frac{L_3 q_3}{2} \\ \frac{L_3 q_3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Матрица размера 4 на 4, располагающаяся в левой части уравнения (27), называется глобальной матрицей жесткости;  $F_1, F_2, F_3, F_4$  – внешние нагрузки, действующие в узлах 1, 2, 3, 4 соответственно.

В качестве примера рассмотрим расчет перемещений точек стержня с переменным сечением, представленном на рис. 3. Модуль упругости материала примем  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Имеем  $A_1 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $A_2 = 40 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $A_3 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$ ,  $L_1 = 2 \text{ м}$ ,  $L_2 = 1 \text{ м}$ ,  $L_3 = 2 \text{ м}$ ,  $q_1 = 1 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$ ,  $F_1 = R_1$ ,  $F_2 = 0$ ,  $F_3 = -1000 \text{ Н}$ ,  $F_4 = 500 \text{ Н}$ .

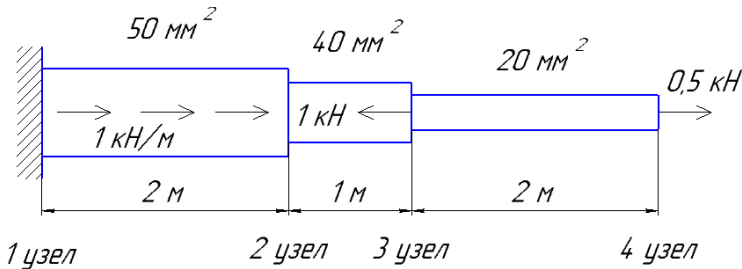


Рис. 3. Стержень с переменным сечением

Система (27) примет вид

$$10^6 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 13 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 + R_1 \\ 1000 \\ -1000 \\ 500 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Поскольку 1-й узел закреплен, то его перемещение равно  $u_1 = 0$ . Для оставшихся перемещений запишем систему

$$10^6 \cdot \begin{pmatrix} 13 & -8 & 0 \\ -8 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ -1000 \\ 500 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Решая систему (29), найдем перемещения в узлах  $u_2 = 0,0001 \text{ м}$ ,  $u_3 = 0,0000375 \text{ м}$ ,  $u_4 = 0,0002875 \text{ м}$ .



Подставляя перемещения  $u_1, u_2, u_3, u_4$  в систему (28), найдем

$$1000 + R_1 = -500, \quad R_1 = -1500 \text{ Н.}$$

Точное решение задачи можно видеть на рис. 4.

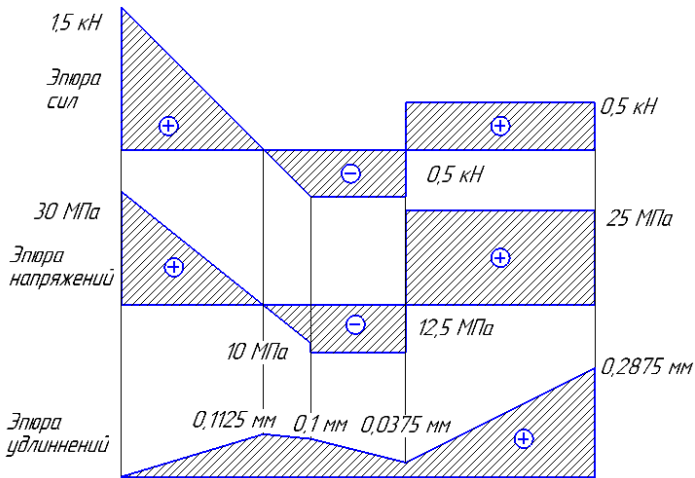


Рис. 4. Точное решение задачи

Сравнивая точное решение задачи и решение, полученное по методу конечных элементов, видим, что эти решения совпадают.

В заключение отметим, что для осмысленного изучения слушателями метода конечных элементов необходимо знание таких математических понятий, как дифференциальные уравнения; метод вычисления интеграла по частям; метод Галеркина; системы линейных алгебраических уравнений, матрицы. Для проверки точности метода конечных элементов желательно знание слушателями основ сопротивления материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Seshu P.* Text book of finite element analysis / Published by Asoke K. Ghosh, PHI Learning Private Limited, M-97, Connaught Circus, New Delhi-110001 and Printed by Mohan Makhijani at Rekha Printers Private Limited, New Delhi-110020. 2012. 558 p.
2. *Fish J.* A first course in finite elements / J. Fish, T. Belytschko. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England, 2007, 344 p.
3. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986. 318 с.

УДК 51:378.147

**Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, Г. Ярославль, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

## **ОПЫТ ПРОВЕДЕНИЯ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОНЛАЙН-ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ**

*Приводятся сведения о Всероссийской студенческой олимпиаде, проведенной онлайн на базе Ярославского государственного технического университета в 2021 году, задания олимпиады и примеры их решения, краткие итоги олимпиады и выводы.*

**Ключевые слова:** студенческая математическая олимпиада, онлайн-олимпиада, решение задач

**Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru

## **EXPERIENCE OF CONDUCTING AN STUDENT ONLINE OLYMPIAD IN MATHEMATICS**

*We give an information about the all-russian student olympiad held online on the Yaroslavl State Technical University in 2021, the tasks of the olympiad and examples of their solution, brief results olympiad and conclusions.*

**Keywords:** student mathematical olympiad, online olympiad, task solution

16 марта 2020 года Всемирная организация здравоохранения объявила пандемию Covid-19, которая внесла существенные изменения во все сферы человеческой деятельности, не исключая и образовательный процесс. В Ярославском государственном техническом университете (ЯГТУ) на октябрь 2020 года было запланировано проведение Всероссийской студенческой олимпиады по математике. Естественно, она не состоялась. Шло время, полное неопределенностей, и возник вопрос о перспективах проведения таких мероприятий, как олимпиады, вносящих большой вклад в поддержание научного потенциала талантливой молодежи.

К 2021 году уже был накоплен некоторый опыт массового дистанционного обучения студентов, оценки контроля качества обучения, приема

в вузы онлайн части абитуриентов, не сдававших ЕГЭ. В ЯГТУ для решения этих задач используется чаще всего сервис Microsoft Teams (продукт Microsoft Office 365).

Авторы настоящей статьи, которые к этому времени уже 25 лет являлись организаторами математических олимпиад разного уровня – от региональных до международных, решили воспользоваться этим опытом и провести онлайн-олимпиаду. В качестве эксперимента решено было в один день соединить две формы проведения: тестовую с открытой формой ответов и классическую с полным решением задач, используя в обоих случаях возможности ЯГТУ для слежения за работой участников. Тестовую форму назвали «Блиц-конкурс», классическую «Основной конкурс», время выполнения соответственно 1 час и 3 часа. Был предусмотрен и технический перерыв между ними.

Остро встал постоянно возникающий перед организаторами олимпиад вопрос об оценках за представленные решения. Невозможность объективной и точной оценки любого вида деятельности и стремление к объективизму породило множество систем оценки решений олимпиадных задач [1]. Кроме обычных вопросов (расставлять ли кажущиеся нам правильными баллы в заданиях априори, как учитывать количество правильно решивших задачу и т.п.) в данной олимпиаде надо было учитывать и особенности ее проведения: проведение онлайн и соединение двух форм.

Была использована такая система оценки: правильный ответ каждой задачи блиц-конкурса оценивался в 1 балл (первичный, или сырой, балл), полное и правильное решение задачи основного конкурса в 10 баллов. Для подведения общего итога с целью соизмеримости результатов обоих конкурсов была составлена таблица перехода от первичного балла в блиц-конкурсе к итоговому (табл. 1).

**Таблица 1. Переход в блиц-конкурсе от первичного балла к итоговому**

Число правильных ответов в задаче, %	(0;8]	(8;16]	(16;24]%	(24;32]	Более 32
Коэффициент	5	4	3	2	1

## **БЛИЦ-КОНКУРС**

Задачи блиц-конкурса и ответы к ним приведены в табл. 2, а итоги в табл. 3.

Таблица 2. Задачи и ответы

№	Условия задач	Ответы
1	Сумма элементов матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2022}$ равна	-2
2	Неравенство $x^4 - 2x^3 + x^2 + p > 0$ справедливо при всех действительных значениях $x$ , если $p$ принадлежит промежутку	$(0; \infty)$
3	Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – заданные векторы, $ \vec{a}  = 2$ , $ \vec{b}  = 1$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}$ , где $\times$ – векторное произведение, равно	$-2\vec{a}$
4	Если $f'(x^3) = \frac{2}{x}$ и $f(0) = 0$ , то $f(1)$ равно	3
5	Наибольший член последовательности $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{320 + n^2}$ равен	1/192
6	Если в двух точках параболы $y^2 = 2px$ касательные перпендикулярны друг другу, то произведение расстояний от этих точек до оси параболы равно	$p^2$
7	$\int \frac{x^2 - 2x}{x^2 + e^x} dx$ равен	$x - \ln(x^2 + e^x) + C$
8	Если $y(x)$ – решение дифференциального уравнения $y'' - 2yy' = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$ , $y'(1) = 1$ , то $y(4)$ равно	-0,5
9	Второй отличный от 0 член в разложении в степенной ряд по степеням $x$ решения дифференциального уравнения $y'' = x^2 + y^2$ , удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$ , $y'(0) = 1$ , равен	$\frac{x^4}{6}$
10	$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2\pi\sqrt{n^2 + 1})$ , $n \in \mathbb{N}$ , равен	1
11	Сумма ряда $3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ равна	$e + 1$
12	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^{-2}(x+1) \int_0^x \ln(t+1) dt$ равен	$\infty$

Таблица 3. Итоговая таблица оценки задач блиц-конкурса.

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число верных ответов, %	63	57	0	21	55	16	16	34	13	58	47	42
Баллы за задачу	1	1	0	3	1	4	4	1	4	1	2	2

## ОСНОВНОЙ КОНКУРС

### Задачи и примеры решений

1. Все элементы квадратной матрицы  $A$  порядка  $n \geq 2$  либо нули, либо единицы,  $\det A \neq 0$ . Какое наибольшее число элементов равных единице может быть у матрицы  $A$ ?

◀ У матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$n-1$  нуль,  $n^2 - n + 1$  единица и  $\det A = (-1)^{n-1} \neq 0$ .

Пусть существует матрица  $A$  с  $\det A \neq 0$ , у которой единиц больше  $n^2 - n + 1$ , а нулей меньше  $n-1$ . Тогда у  $A$  есть, по меньшей мере, две одинаковые строки, содержащие только единицы, и потому  $\det A = 0$ . Получили противоречие, из которого следует, что сделанное предположение неверно. Поэтому наибольшее возможное число элементов, равных единице, равно  $n^2 - n + 1$ . ▶

2. Найти все действительные корни уравнения  $\frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + 2x = 0$ .

◀ Пусть  $f(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 + 2x$ . Функция меняет знак:  $f(-1) < 0$ ,  $f(1) > 0$ . Так как для всех  $x$

$$f'(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 2 = x^4 + 2x^2 + (x-1)^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

то функция возрастает. Следовательно, она имеет единственный корень  $x = 0$ . ▶

3. Функция  $f(x)$  имеет в точке  $x = 0$  непрерывную производную второго порядка,  $f(0) = 0$ . Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} \right)'$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} \right)' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(xf'(x) - f(x))'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + xf''(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

4. Доказать, что линия, заданная уравнением

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x + y - 1 = 0,$$

лежит внутри круга радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в начале координат.

◀ Указанная линия – непустое множество, так как, например, она содержит точку  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ . В полярных координатах уравнение линии  $\rho^4 - \rho(\cos \varphi - \sin \varphi) - 1 = 0$  или равносильно  $\rho^3 - 1/\rho = \sqrt{2} \sin(\pi/4 - \varphi)$ . Поэтому на линии  $\rho^3 - 1/\rho \leq \sqrt{2}$ . Точки с  $\rho \geq \sqrt{2}$  данному неравенству не удовлетворяют, так как в этом случае

$$\rho^3 - 1/\rho \geq (\sqrt{2})^3 - 1/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2 > \sqrt{2}.$$

Таким образом, на рассматриваемой линии  $\rho < \sqrt{2}$ , то есть линия лежит внутри круга радиуса  $\sqrt{2}$  с центром в начале координат. ▶

5. Найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}{n}.$$

◀ При  $x \neq 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \text{Im}(e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{inx}) = \text{Im} \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}.$$

Так как числитель дроби ограничен:

$$\left| \text{Im} \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| \leq \left| \frac{e^{ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| = \frac{|e^{ix} - e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|} \leq \frac{|e^{ix}| + |e^{i(n+1)x}|}{|1 - e^{ix}|} = \frac{2}{|1 - e^{ix}|},$$

то предел равен нулю. При  $x = 2\pi k$  дробь равна нулю и предел равен нулю. ▶

6. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \sin x - \cos x}{2x^2 - \pi x + 2\pi^2} dx .$$

◀ Замена  $x - \pi/4 = t$  .

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \sin x - \cos x}{2x^2 - \pi x + 2\pi^2} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 + \sqrt{2} \sin t}{t^2 + 15\pi^2/16} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{t^2 + 15\pi^2/16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin t dt}{t^2 + 15\pi^2/16} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{t^2 + 15\pi^2/16} = \\ &= \frac{4}{\pi\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}} . \blacktriangleright \end{aligned}$$

7. Найти решение  $x(t)$  дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sin x \cos x - t \sin^2 x ,$$

удовлетворяющее начальному условию  $x(0) = \frac{\pi}{2}$  .

◀ Так как постоянные функции  $x = 0$  и  $x = \pi$  являются решениями, то по теореме единственности искомое решение  $0 < x(t) < \pi$  при всех  $t$ , для которых оно определено. В области  $0 < x < \pi$  делаем замену  $\operatorname{ctg} x = z$  ( $x = \operatorname{arctg} z$ ). Получаем линейное уравнение  $\dot{z} = -z + t$  и начальное условие  $z(0) = 0$ . Решая полученную задачу Коши, находим  $z = t - 1 + e^{-t}$ ,  $x(t) = \operatorname{arctg}(t - 1 + e^{-t})$ . ▶

Таблица 4. Результаты основного конкурса

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7
Число решивших	20%	60%	32%	8%	13%	24%	11%

Олимпиада была проведена 27 февраля 2021 года. В олимпиаде приняли участие студенты и курсанты 19 образовательных организаций высшего образования из 13 регионов России: Академия ФСО России (г. Орел), ВА РВСН (г. Балашиха), СамГТУ (г. Самара), РГУ и РГРТУ (г. Рязань), ЮРГПУ (НПИ) (г. Новочеркасск), ВА ВКО (г. Тверь), ТГТУ (г. Тамбов), РГАТУ им. П.А. Соловьева (г. Рыбинск), КГУ (г. Кострома), ФВА РВСН (г. Серпухов), ИАТЭ НИЯУ МИФИ (г. Обнинск), ВКА им. А.Ф. Можайского и СПб УГПС МЧС (г. Санкт-Петербург), НИУ МГСУ,

МГТУ им. Н.Э. Баумана, МГТУ «Станкин» и РГУ нефти и газа (г. Москва), ТПУ (г. Томск), ЯВВУ ВПО и ЯГТУ (г. Ярославль).

Из-за отсутствия опыта проведения онлайн-олимпиад были введены жесткие ограничения по составу и количеству участников: в соответствии с Положением об олимпиаде в ней могли принимать участие от каждого вуза не более двух человек, обучающихся на 2-4 курсах технических специальностей вузов. Поэтому всего участников было 38.

Вывод, который созрел спустя девять месяцев после олимпиады: несмотря на несомненные и многочисленные преимущества очных олимпиад, в безвыходных ситуациях онлайн-олимпиады проводить можно и нужно хотя бы для сохранения этого вида образовательной деятельности, полезной как для учащихся, так и для преподавателей. Сомнения в чистоте проведенного эксперимента рассеиваются при анализе итоговой таблицы олимпиады: по крайней мере, ни у каких двух участников одного вуза нет одинаковых результатов, даже у тех, которые при выполнении заданий находились в одном помещении.

К существенным недостаткам работы в Teams следует отнести трудность набора математического текста для тестирования и обязательное введение всех вариантов записи правильных ответов. Поэтому пришлось вручную перепроверить все ответы участников, которые выводились как неверные.

Проведенная олимпиада еще раз убедила авторов, что наше представление о трудности задачи не всегда совпадает со студенческим представлением. Так, например, при экспертизе заданий олимпиады было предложение вообще убрать из заданий блиц-конкурса задачу 3 на векторы как учебную, а её не решил ни один из участников. Также в настоящее время кажется не совсем правильной шкала перехода от первичного балла к итоговому (см. табл. 1), хотя при рассмотрении еще нескольких разумных вариантов перехода итоги олимпиады не изменялись.

### **Победитель и призеры олимпиады:**

**1-е место** занял С.Н. Шишов, студент МГСУ; **2-е место** А.А. Забавникова, студентка ТГТУ и В.В. Сигаева, курсантка ВА ВКО; **3-е место** А.Б. Овсянов, студент КГУ, Б.Б. Абдуллаев, студент МГСУ и В.С. Давыденко, курсант ВКА.

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Келдибекова А.О.* О подходах к оценке решения задач математических олимпиад школьников // Перспективы науки и образования. 2019. №5(41). С. 324-344. DOI: 10.32744/pse.2019.5.23



УДК 51:378.147

**Ю. К. Оленикова, В. Ш. Ройтенберг**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

## **ЗАДАНИЯ И ИТОГИ ВСЕРОССИЙСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 2021 ГОДА**

*Приведены задачи и их решения, а также итоги очередной Всероссийской студенческой олимпиады, проведенной Ярославским государственным техническим университетом в 2021 году. Обсуждается методика, используемая для оценки решений олимпиадных заданий.*

**Ключевые слова:** *студенческая математическая олимпиада, решение задач*

**Ju. K. Olenikova, V. Sh. Roitenberg**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: olenikovajk@mail.ru, vroitenberg@mail.ru*

## **TASKS AND RESULTS OF THE ALL-RUSSIAN STUDENT OLYMPIADS IN MATH 2021**

*We give an information about the all-russian student olympiad held by the Yaroslavl State Technical University in 2021, the tasks of the Olympiad and examples of their solution, brief results olympiad and conclusions. The methodology used to evaluate the decisions of the olympiad tasks is discussed.*

**Keywords:** *student mathematical olympiad, online olympiad, task solution*

В 2021 году в Ярославском государственном техническом университете (ЯГТУ) были проведены две Всероссийские студенческие олимпиады по математике. После онлайн-олимпиады, состоявшейся в феврале [1], продолжался спад числа заразившихся и заболевших коронавирусом [2], к маю был достигнут минимум, студенты перешли на очное обучение, и руководством ЯГТУ был издан приказ о проведении в октябре очной олимпиады. Сообщество тренеров и руководителей команд постоянных участников олимпиад это сообщение было воспринято с энтузиазмом. Но с июля положение стало ухудшаться. В третьей декаде сентября 2021 года в России был зафиксирован новый всплеск заболеваемости, поэтому количество заявок на участие в олимпиаде стало уменьшаться, и буквально за 2–4 дня до начала олимпиады, запланированной на 14–17 октября, от официальных заявок осталось только 2/3.

И все же олимпиада состоялась. И за все время проведения мероприятия не заболел ни один участник!

В олимпиаде приняли участие 84 студента и курсанта 2–4 курсов 20 вузов из 13 регионов России: ВГСПУ (Волгоград), СамГТУ (Самара), ТГТУ (Тамбов), ВА ВКО (Тверь), ВА РВСН (Балашиха), ФВА РВСН (Серпухов), ВА ВПВО ВС РФ (Смоленск), НГТУ (Новосибирск), МГТУ им. Н.Э. Баумана (Москва), РТУ МИРЭА (Москва), ВУРЭ (Череповец), Финансовый университет (Москва), НИУ МГСУ (Москва), ИАТЭ НИЯУ МИФИ (Обнинск), СПбГЭУ (Санкт-Петербург), ПГНИУ (Пермь), НИУ МГСУ (Москва), РГАТУ им. П.А. Соловьева (Рыбинск), ВА ВПВО (Ярославль), ЯГТУ (Ярославль).

### Задачи и образцы решений

**Задача 1.** Существует ли квадратная матрица порядка  $n \geq 2$ , элементы которой равны либо 1, либо -1, а определитель равен 2021?

◀ Прибавим к первой строке вторую. Определитель не изменится. Все элементы первой строки теперь равны либо нулю, либо  $\pm 2$ . Поэтому определитель – целое число, кратное 2. Нечетному числу 2021 он равняться не может. ▶

**Ответ.** Такой матрицы не существует.

**Задача 2.** При каких  $n \geq 3$  существуют разные векторы  $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  в трехмерном пространстве, для которых

$$\begin{aligned} |\vec{a}_0| = |\vec{a}_1| = \dots = |\vec{a}_n| = 1, \\ \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1 = \dots = \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_n = \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \dots = \vec{a}_{n-1} \cdot \vec{a}_n = \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1? \end{aligned} \quad (1)$$

**Решение 1** (алгебраическое). ◀ Будем считать, что  $\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_1$ . Предположим, что векторы, удовлетворяющие условиям (1), существуют. Тогда все углы  $(\widehat{\vec{a}_0, \vec{a}_k})$ ,  $(\widehat{\vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , одинаковые. Обозначим  $\varphi$  величину этих углов. Пусть вектор  $\vec{p}_k$ ,  $k = 1, \dots, n+1$ , – проекция вектора  $\vec{a}_k$  на плоскость  $P$ , перпендикулярную вектору  $\vec{a}_0$ . Тогда  $|\vec{p}_k| = \sin \varphi$ . Так как  $\vec{a}_k \cdot \vec{a}_0 = \vec{a}_{k+1} \cdot \vec{a}_0$ , то  $(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k) \cdot \vec{a}_0 = 0$ , то есть  $(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k) \parallel P$ . Поэтому проекция вектора  $(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k)$  на плоскость  $P$  совпадает с  $(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k)$ . С другой стороны, эта проекция равна разности проекций векторов  $\vec{a}_{k+1}$  и  $\vec{a}_k$ , то есть равна  $\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k$ . Таким образом,  $\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k = \vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k$  и, тем более,

$$(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k)^2 = (\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k)^2, k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Так как

$$(\vec{a}_{k+1} - \vec{a}_k)^2 = |\vec{a}_{k+1}|^2 - 2|\vec{a}_k||\vec{a}_{k+1}|\cos\varphi + |\vec{a}_k|^2 = 2(1 - \cos\varphi) \quad (3)$$

не зависит от  $k = 1, \dots, n$ , а

$$\begin{aligned} (\vec{p}_{k+1} - \vec{p}_k)^2 &= |\vec{p}_{k+1}|^2 - 2|\vec{p}_k||\vec{p}_{k+1}|\cos(\widehat{\vec{p}_k, \vec{p}_{k+1}}) + |\vec{p}_k|^2 = \\ &= 2\sin^2\varphi(1 - \cos(\widehat{\vec{p}_k, \vec{p}_{k+1}})), \end{aligned} \quad (4)$$

то все углы  $(\widehat{\vec{p}_k, \vec{p}_{k+1}})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , одинаковые. Поскольку векторы  $\vec{p}_k$  лежат в одной плоскости, то  $(\widehat{\vec{p}_k, \vec{p}_{k+1}}) = 2\pi/n$ . Из (2)–(4) получаем

$$1 - \cos\varphi = \sin^2\varphi(1 - \cos 2\pi/n), \quad 1 - \cos\varphi = (1 - \cos^2\varphi)(1 - \cos 2\pi/n), \\ 1 = (1 + \cos\varphi)(1 - \cos 2\pi/n) \text{ и, наконец,}$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos 2\pi/n}{1 - \cos 2\pi/n}, \text{ а } \cos 2\pi/n = \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi}. \quad (5)$$

Угол  $\varphi \in (0, \pi)$ , удовлетворяющий этому уравнению, существует, если  $-1 < (\cos 2\pi/n)/(1 - \cos 2\pi/n) < 1$ . Отсюда получаем  $\cos 2\pi/n < 1/2$ ,  $2\pi/n > \pi/3$ ,  $n < 6$ , то есть  $n \in \{3, 4, 5\}$ . Нетрудно проверить, что при любом  $n \in \{3, 4, 5\}$  векторы

$$\vec{a}_0 = (0, 0, 1), \quad \vec{a}_k = (\sin\varphi \cos 2\pi k/n, \sin\varphi \sin 2\pi k/n, \cos\varphi), \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $\varphi \in (0, \pi)$  находится из (5), удовлетворяют условиям (1):

$$\begin{aligned} |\vec{a}_k|^2 &= \sin^2\varphi(\cos^2 2\pi k/n + \sin^2 2\pi k/n) + \cos^2\varphi = 1, \\ \vec{a}_k \cdot \vec{a}_{k+1} &= \sin^2\varphi \left( \cos \frac{2\pi k}{n} \cos \frac{2\pi(k+1)}{n} + \sin \frac{2\pi k}{n} \sin \frac{2\pi(k+1)}{n} \right) + \cos^2\varphi = \\ &= \sin^2\varphi \cos \frac{2\pi}{n} + \cos^2\varphi = \sin^2\varphi \frac{\cos\varphi}{1 + \cos\varphi} + \cos^2\varphi = (1 - \cos\varphi)\cos\varphi + \cos^2\varphi = \\ &= \cos\varphi = \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_k. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Решение 2** (геометрическое). ◀ Пусть  $\vec{a}_0 = \overrightarrow{ON}$ ,  $\vec{a}_k = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{a}_{k+1} = \overrightarrow{OB}$ ,  $C$  – середина  $AB$ ,  $\widehat{AOC} = \varphi/2 < \pi/2$ ,  $A'$  и  $C'$  – проекции  $A$  и  $C$  на плоскость, перпендикулярную  $\overrightarrow{ON}$  (рис. 1). Так как  $\widehat{AOA'} = \pi/2 - \varphi$  или  $\widehat{AOA'} = \varphi - \pi/2$ , то  $OA' = \sin\varphi$ ,  $A'C' = \sin\varphi \sin(\pi/n)$ ,  $AC = \sin\varphi/2$ . Поскольку  $A'C' = AC$ , то

$$\sin \varphi \sin(\pi / n) = \sin \varphi / 2, \quad 2 \cos(\varphi / 2) \sin(\pi / n) = 1, \quad \cos(\varphi / 2) = \frac{1}{2 \sin(\pi / n)}.$$

Так как  $\cos(\varphi / 2) < 1$ , то и  $\frac{1}{2 \sin(\pi / n)} < 1$ ,  $\sin \frac{\pi}{n} > \frac{1}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{n} < \frac{5\pi}{6}$ ,  $6/5 < n < 6$ . Следовательно,  $n \in \{3, 4, 5\}$ . При каждом  $n \in \{3, 4, 5\}$  можно построить векторы  $\vec{a}_k$ ,  $k=1, \dots, n$ , удовлетворяющие условиям (1), взяв  $\varphi = 2 \arccos \frac{1}{2 \sin(\pi / n)}$ . ►

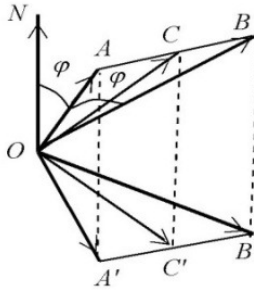


Рис. 1

**Ответ.** При  $n=3$ ,  $n=4$  и  $n=5$ .

**Задача 3.** Пусть  $f(x)$  – любая непрерывная функция на  $[-1, 1]$ . Доказать, что уравнение  $f(\sin x) - f(\cos x) = x^2 - x$  имеет по крайней мере два корня.

◀ Функция  $F(x) = f(\sin x) - f(\cos x) - x^2 + x$  – непрерывна на  $\mathbb{R}$ . Так как  $F(-3\pi/4) = f(-\sqrt{2}/2) - f(-\sqrt{2}/2) - (3\pi/4)^2 - 3\pi/4 = -(3\pi/4)^2 - 3\pi/4 < 0$ ,  $F(\pi/4) = f(\sqrt{2}/2) - f(\sqrt{2}/2) - (\pi/4)^2 + \pi/4 = -(\pi/4)^2 + \pi/4 > 0$ ,  $F(5\pi/4) = f(-\sqrt{2}/2) - f(-\sqrt{2}/2) - (5\pi/4)^2 + 5\pi/4 = -(5\pi/4)^2 + 5\pi/4 < 0$ , то  $F(x)$  имеет по крайней мере два нуля. ►

**Задача 4.** Найдите  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln |\ln x|$ .

$$\leftarrow \lim_{x \rightarrow +0} x \ln |\ln x| = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(-\ln x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-1/(x \ln x)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x} = 0. \quad \blacktriangleright$$

**Ответ.** 0.

**Задача 5.** При каких  $c \in \mathbb{C}$  система уравнений  $\bar{c}z + c\bar{z} = 2, |z| = 1$  имеет единственное решение  $z \in \mathbb{C}$  ?

**Решение 1.** ◀ Пусть  $c = |c|e^{i\alpha} = \rho e^{i\alpha}, z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ . Тогда

$$\rho e^{i(\varphi-\alpha)} + \rho e^{-i(\varphi-\alpha)} = 2, \quad \rho(e^{i(\varphi-\alpha)} + e^{-i(\varphi-\alpha)}) = 2, \quad 2\rho \cos(\varphi-\alpha) = 2, \\ \cos(\varphi-\alpha) = 1/\rho.$$

Решения этого уравнения относительно  $\varphi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$  есть при  $\rho \geq 1$ :  $\varphi = \alpha \pm \arccos(1/\rho)$ . Единственное решение  $\varphi = \alpha$  будет только при  $\rho = 1$ . Итак, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда  $|c| = \rho = 1$ . ▶

**Решение 2.** ◀ Пусть  $c = a + ib, z = x + iy$ . Тогда система уравнений примет вид  $ax + by = 1, x^2 + y^2 = 1$ . При  $a = b = 0$  решений нет. Если  $b \neq 0$ , то, выражая  $y$  через  $x$  из первого уравнения и подставляя во второе, получим  $(a^2 + b^2)x^2 - 2ax + 1 - b^2 = 0$ . Решения будет единственное, если дискриминант  $D = a^2 - (a^2 + b^2)(1 - b^2) = 0$ , что равносильно равенству  $a^2 + b^2 = 1$ , то есть  $|c| = 1$ . В случае  $a \neq 0$  рассуждения аналогичны. ▶

**Ответ.** При всех  $c \in \mathbb{C}$ , для которых  $|c| = 1$ .

**Задача 6.** Вычислить интеграл  $\int_0^2 xg(x)dx$ , где  $g$  – функция, обратная к функции  $f$ , заданной формулой  $f(x) = x^3 + x$ .

◀ Сделаем в интеграле замену  $g(x) = t$ . Тогда  $x = f(t) = t^3 + t$ ,

$$\int_0^2 xg(x)dx = \int_0^1 f(t)tdf(t) = \int_0^1 t(t^3 + t)(3t^2 + 1)dt = \int_0^1 (3t^6 + 4t^4 + t^2)dt = \frac{164}{105}. \quad \blacktriangleright$$

**Ответ.** 164/105.

**Задача 7.** Вычислить интеграл  $\int_3^7 \frac{\ln x}{\ln(10x - x^2)} dx$ .

$$\blacktriangleleft \int_3^7 \frac{\ln x}{\ln(10x - x^2)} dx = \int_3^7 \frac{\ln(10x - x^2) - \ln(10 - x)}{\ln(10x - x^2)} dx = \int_3^7 dx - \int_3^7 \frac{\ln(10 - x)}{\ln(10x - x^2)} dx =$$

$$= \|x \text{ a } 10-x\| = 4 + \int_7^3 \frac{\ln x}{\ln(10x-x^2)} dx = 4 - \int_3^7 \frac{\ln x}{\ln(10x-x^2)} dx .$$

$$\int_3^7 \frac{\ln x}{\ln(10x-x^2)} dx = 2 . \blacktriangleright$$

**Ответ. 2.**

**Задача 8.** Найти производную функции

$$f(r) = \iint_{x^2+y^2 \leq r} \sqrt{2-\cos(x^2+y^2)} dx dy , r \in (0, \infty) .$$

◀ При любом  $r \in (0, \infty)$  имеем

$$f(r) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{r}} \sqrt{2-\cos \rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\sqrt{r}} \sqrt{2-\cos \rho^2} \rho d\rho = \pi \int_0^r \sqrt{2-\cos t} dt .$$

Поэтому  $f'(r) = \pi \sqrt{2-\cos r}$  . ▶

**Ответ.**  $f'(r) = \pi \sqrt{2-\cos r}$  .

**Задача 9.** Найти все функции  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , такие, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(x) + f(1-x) .$$

**Решение 1.** ◀ Если  $f(x)$  удовлетворяет уравнению, то, заменяя в уравнении  $x$  на  $1-x$ , получим  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(1-x) = f(1-x) + f(x)$ . Поэтому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(1-x) = f'(x) , (f(1-x) + f(x))' = 0 , f(x) + f(1-x) = C ,$$

где  $C$  – постоянная. Но тогда  $f'(x) = C$  и  $f(x) = Cx + D$ , где  $D$  – постоянная. Подставляя  $f(x) = Cx + D$  в уравнение, получаем

$$C = Cx + D + C - Cx + D , D = 0 , C - \text{любое} .$$

Итак,  $f(x) = Cx$ , где  $C$  – произвольная постоянная. ▶

**Решение 2.** ◀ Как и в решении 1 получим

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(1-x) = f(1-x) + f(x) .$$

Если  $f(x)$  удовлетворяет уравнению, то она и дважды дифференцируема.

Следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f'(x) - f'(1-x) = 0$  и  $f(x) = Cx + D$ .

Далее, как в решении 1. ▶

**Ответ:**  $f(x) = Cx$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

**Задача 10.** Сходится ли ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , где  $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 k}$ ?

$$\blacktriangleleft u_n \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)} \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\ln^2(n+1)} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$  сходится по интегральному признаку. По признаку срав-

нения сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .  $\blacktriangleright$

**Ответ.** Ряд сходится.

### Система проверки и итоги олимпиады

Анализ нашего первого опыта оценки решений в виде сырых равных баллов за каждую задачу с последующим переходом к итоговым баллам (в онлайн-олимпиаде, [1]) дал положительные результаты. Однако для большей справедливости мы решили применять более плавный и естественный переход. Поскольку более 10 последних лет оргкомитетом ВСО (Всероссийской студенческой олимпиады) рассылались методические материалы, в которых официально была рекомендована 100-балльная система оценки олимпиадной работы, а олимпиады ЯГТУ традиционно содержат 10 заданий, то таким переходом лучше всего мог быть любой из указанных в табл. 1 и 2.

**Таблица 1. Переход от первичного балла к итоговому при максимальном сыром балле, равном 10**

Число правильных решений задачи, %	[0;10]	(10;20]	(20;30]	...	(90;100]
Коэффициент	1	0,9	0,8	...	0,1

**Таблица 2. Переход от первичного балла к итоговому при максимальном сыром балле, равном 1**

Число правильных решений задачи, %	[0;10]	(10;20]	(20;30]	...	(90;100]
Коэффициент	10	9	8	...	1

Из-за многолетней традиции наших олимпиад проводить по критериям 10-балльной оценки задачи в данной олимпиаде была использована

табл. 1. Следует отметить также, что членами жюри была одобрена новая система оценки заданий.

**Таблица 3. Итоговая таблица**

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число верно решенных задач, %	15	0	4	21	8	4	30	10	25	2

Сравнение табл. 3 с аналогичными данными предыдущих олимпиад ЯГТУ показывает ухудшение результатов. Несомненно, сказывается не только дистанционное обучение, но и уменьшение учебных часов на математические дисциплины, и, возможно, расстановка приоритетов у молодежи не в пользу занятий математикой.

Но, как всегда, есть талантливые ребята, которые показали очень хорошие результаты.

**В абсолютном зачете на личное первенство победили:**

**1-е место:** Павлов С.А. – студент НГТУ;

**2-е место:** Фам Куок Вьет – студент МГТУ им. Н.Э. Баумана;

**3-е место:** Капитонов И.В. – курсант ФВА РВСН.

**Победители командного конкурса:**

**1-е место:** команда НГТУ;

**2-е место:** команда ВА ВКО;

**3-е место:** команда МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Кроме того, решением жюри были награждены пятикурсники, участвующие в олимпиаде вне конкурса и набравшие большее количество баллов, чем участники конкурса: Д.М. Шиповский – курсант ВА ВКО (1-е место), С.О. Цветков – курсант ВА ВКО (2-е место) и В.М. Мартынов – курсант ВА ВКО (3-е место); а также студенты и курсанты 10 номинаций, определенных в соответствии с направлениями подготовки бакалавров.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Оленикова Ю.К.* Опыт проведения студенческой онлайн-олимпиады по математике / Ю.К. Оленикова, В.Ш. Ройтенберг // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 17. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2022. С. 81-87.
2. Коронавирус в России – Статистика [07.01/2022] – Графики. URL: <https://index.minfin.com.ua/reference/coronavirus/geography/russia/>



УДК 517.925:378.147

**М. В. Ушенин, А. И. Шевцова**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: ushenin\_mv@mail.ru, alynnox@yandex.ru

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРЕПОДАВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

*Рассматриваются геометрические приложения дифференциальных уравнений первого порядка и их связь с основными разделами курса математики.*

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения первого порядка, касательная, нормаль, огибающая, траектория

**M. V. Ushenin, A. I. Shevsova**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: ushenin\_mv@mail.ru, alynnox@yandex.ru

## **GEOMETRIC PROBLEMS IN TEACHING FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Geometric applications of first-order differential equations and their connection with the main sections of the mathematics course are considered.*

*Keywords:* first-order differential equations, tangent, normal, envelope, trajectory

Системно-либеральный подход к перестройке высшего образования в России, имеющий целью выпуск «универсальных» специалистов, способных решать самые сложные задачи в различных областях деятельности, требует наличия весьма серьезных знаний в области фундаментальных наук, роль и доля которых в образовании в соответствии с поставленной целью должна заметно вырасти. Базой фундаментальных наук является математика. На практике ситуация, сложившаяся с преподаванием математики в последние годы, к сожалению, имеет обратную тенденцию: объем часов резко уменьшился, в результате чего курс высшей математики во многих региональных вузах напоминает руинизированную мозаику со многими утраченными компонентами.

Очевидно, данное обстоятельство требует корректировки всего процесса преподавания математики, причем на первый план выходит задача поддержания, а местами, и восстановления связей между отдельными разделами курса.

В данной работе авторы хотели акцентировать связь одного из самых «изолированных» разделов, а именно «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка» с такими разделами, как «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Обычно изучение раздела «Дифференциальные уравнения» сводится к формальному натаскиванию студентов на чисто технические вопросы решения дифференциальных уравнений с целью получения общего решения уравнения или решения задачи Коши, оставляя в тени массу вопросов, так или иначе связанных с геометрическими приложениями.

Выделим лишь некоторые из них:

- 1) определение кривой по свойствам касательной;
- 2) определение кривой по свойствам нормали;
- 3) определение ортогональных траекторий к заданной кривой или семейству кривых;
- 4) определение огибающей семейства кривых (особые решения дифференциальных уравнений).

Ниже приводятся примеры задач для каждого типа вопросов.

**Пример 1.** Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания [1].

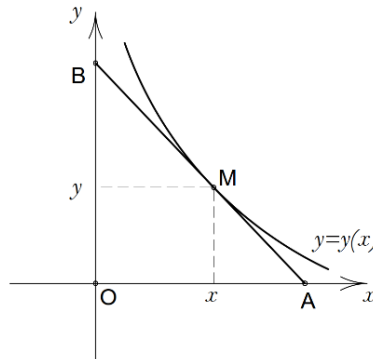


Рис. 1

**Решение.**

Пусть  $y = y(x)$  – уравнение искомой кривой. Проведем в ее произвольной точке  $M(x; y)$  касательную  $AB$  (рис. 1).

По условию задачи  $|AM| = |BM|$ .

Обозначим  $(x; y(x))$  – координаты точек кривой;  $(X; Y)$  – координаты точек касательной.

Уравнение касательной  $AB$  имеет вид

$$Y = y + y'(x)(X - x).$$

В точке  $A$  ордината  $Y = 0$ , поэтому из уравнения находим абсциссу:

$$0 = y + y'(x)(X_A - x) \Rightarrow X_A = x - \frac{y(x)}{y'(x)}.$$

Следовательно, координаты точки  $A \left( x - \frac{y(x)}{y'(x)}; 0 \right)$ .

В точке  $B$  абсцисса  $X = 0$ , поэтому

$$Y_B = y(x) + y'(x)(0 - x) \Rightarrow Y_B = y(x) - xy'(x).$$

Координаты точки  $B(0; y(x) - xy'(x))$ .

Точка  $M(x; y(x))$  – середина  $AB$ , следовательно, координаты точки  $M$  – среднее арифметическое координат точек  $A$  и  $B$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left( x - \frac{y(x)}{y'(x)} \right), \\ y(x) = \frac{1}{2} (y(x) - xy'(x)). \end{cases}$$

Как видим, искомая кривая описывается дифференциальным уравнением первого порядка (уравнение с разделяющимися переменными)

$$y = -xy'.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение уравнения

$$y = \frac{C}{x},$$

представляющее собой семейство гипербол (рис. 2).

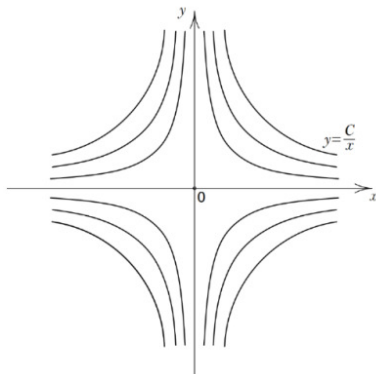


Рис. 2

**Пример 2.** Найти кривую, проходящую через точку  $(1; 2)$ , угловой коэффициент касательной к которой в произвольной точке в  $n$  раз больше углового коэффициента радиус-вектора этой точки [2].

**Решение.**

Пусть  $y = y(x)$  – искомая кривая.  $M(x; y(x))$  – точка касания (рис. 3).

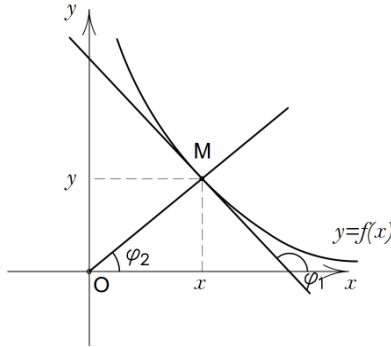


Рис. 3

Угловой коэффициент касательной

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 = y'(x).$$

Угловой коэффициент радиус-вектора точки  $M(x; y(x))$

$$k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{y(x)}{x}.$$

По условию  $k_1 = nk_2$  или  $y'(x) = n \frac{y(x)}{x}$ , т.е. искомая кривая описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение дифференциального уравнения

$$y = Cx^n.$$

Оно представляет собой семейство парабол  $n$ -го порядка.

Искомая кривая является частным решением, удовлетворяющим начальному условию  $y(1) = 2$ :

$$2 = C \cdot 1^n \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y = 2x^n.$$

**Пример 3.** Найти кривую, проходящую через точку  $(1; 0)$ , произведение абсциссы любой точки которой на отрезок, отсекаемый нормалью на оси  $Ox$ , равно удвоенному квадрату расстояния этой точки от начала координат [1].

**Решение.**

Пусть  $y = y(x)$  – искомая кривая (рис. 4),  $l$  – касательная,  $M(x; y(x))$  – точка касания,  $N$  – нормаль,  $(X; Y)$  – координаты точек нормали.

Уравнение нормали

$$Y = y(x) - \frac{1}{y'(x)}(X - x).$$

По условию

$$x \cdot |OA| = 2|OM|^2. \quad (1)$$

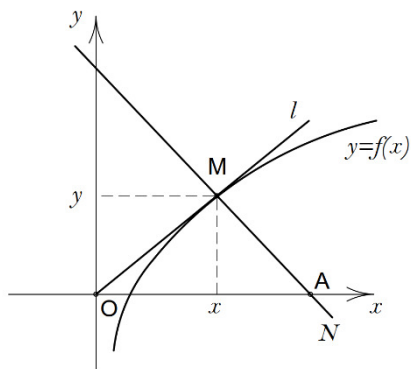


Рис. 4

Абсциссу точки  $A$  найдем из условия  $Y = 0$ :

$$0 = y(x) - \frac{1}{y'(x)}(X_A - x) \Rightarrow X_A = y(x)y'(x) + x.$$

Квадрат расстояния точки  $M(x; y(x))$  от начала координат равен квадрату длины радиус-вектора  $\overline{OM}$ :

$$|OM|^2 = x^2 + y^2(x).$$

В силу равенства (1) имеем

$$x(y(x)y'(x) + x) = 2(x^2 + y^2(x)) \Leftrightarrow xy(x)y'(x) = 2y^2(x) + x^2.$$

Таким образом, функция  $y = y(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$xyy' = 2y^2 + x^2 \quad (2)$$

и начальному условию  $y(1) = 0$ . Полагая  $x \neq 0$ , разделим обе части уравнения (2) на  $x^2$ :

$$\frac{y}{x}y' = 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1.$$

Получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Найдем его общее решение.

$$\left\{ u = \frac{y}{x}, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u \right\}$$

$$u(u'x + u) = 2u^2 + 1 \Leftrightarrow uu'x = u^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{udu}{u^2 + 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{udu}{u^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|u^2 + 1| = \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx|$$

$$\Rightarrow u^2 + 1 = C^2 x^2 \Rightarrow u = \pm \sqrt{C^2 x^2 - 1} \Rightarrow \frac{y}{x} = \pm \sqrt{C^2 x^2 - 1};$$

$$y = \pm x \sqrt{C^2 x^2 - 1}.$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \pm \sqrt{C^2 - 1} \Rightarrow C^2 = 1 \Rightarrow y = \pm x \sqrt{x^2 - 1}.$$

Решение задач второго типа подводит к решению задач третьего типа – определению ортогональных траекторий.

Ортогональными траекториями семейства кривых  $F(x, y, C) = 0$  называются кривые другого семейства, каждая из которых пересекает все кривые первого семейства под прямым углом.

Алгоритм решения данной задачи состоит из трех шагов [1]:

1) составляем дифференциальное уравнение исходного семейства  $f(x, y, y') = 0$ ;

2) заменяем в этом уравнении  $y'$  на  $-\frac{1}{y'}$ , получаем дифференциальное уравнение семейства искомых кривых  $f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$ ;

3) интегрируем полученное дифференциальное уравнение.

**Пример 4.** Найти ортогональные траектории семейства эллипсов с заданным отношением длин полуосей.

**Решение.**

Пусть  $\frac{a}{b} = n$ . Тогда  $a = bn$ . При  $b = c$ ,  $a = nc$  и  $a^2 = n^2 c^2$ .

Уравнение исходного семейства эллипсов имеет вид

$$\frac{x^2}{n^2 c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

или

$$y^2 = c^2 - \frac{x^2}{n^2}.$$

Дифференцируя по  $x$ , получаем дифференциальное уравнение исходного семейства

$$2yy' = -\frac{2x}{n^2}.$$

Заменяя  $y'$  на  $-\frac{1}{y'}$ , имеем дифференциальное уравнение семейства искоемых кривых

$$y\left(-\frac{1}{y'}\right) = -\frac{x}{n^2} \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{x}{n^2}.$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, находим семейство ортогональных траекторий:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = \frac{n^2}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{n^2}{x} dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = n^2 \int \frac{dx}{x} + \ln|C| &\Rightarrow y = Cx^{n^2}. \end{aligned}$$

В частности, при  $n = \sqrt{2}$ , ортогональные траектории семейства эллипсов  $\frac{x^2}{2c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$  представляют собой семейство парабол  $y = Cx^{n^2}$  (рис. 5).

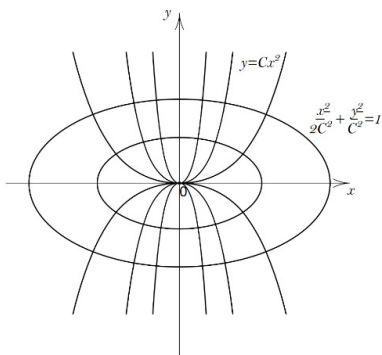


Рис. 5

Рассмотрим задачи четвертого типа – задачи на определение огибающей семейства интегральных кривых общего решения дифференциального уравнения, которая соответствует особому решению уравнения.

Напомним, что особым решением дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

называется такое решение  $\varphi(x)$ , что в каждой точке  $(x; \varphi(x))$  нарушается условие единственности решения.

Особое решение не получается из общего решения ни при каком значении  $C$ .

Способы отыскания особого решения хорошо известны [2,3]:

1) особое решение находится среди “потерянных” в процессе решения дифференциального уравнения;

2) особое решение находится с помощью исследования  $p$  – дискриминанта дифференциального уравнения: если  $F(x, y, y')$  в уравнении (3) и ее частные производные  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y'}$ , непрерывны в области определения дифференциального уравнения, то особое решение определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0; \end{cases} \quad (4)$$

3) особое решение находится с помощью  $c$  – дискриминанта: если функция  $\Phi(x, y, c)$  – общее решение дифференциального уравнения (3), то особое решение определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \frac{\partial \Phi(x, y, c)}{\partial c} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В любом случае (независимо от того, каким именно образом была найдена функция  $\varphi(x)$ ) необходимо проверить:

- является ли функция  $\varphi(x)$  решением дифференциального уравнения;
- является ли функция  $\varphi(x)$  особым решением, то есть нарушается ли условие единственности в каждой точке функции  $\varphi(x)$ .

Для этого нужно записать условия касания кривой семейства общего решения  $y = y_1(x, c)$  и кривой особого решения  $y = y_2(x)$  в произвольной точке:

$$\begin{cases} y_1(x_0, c) = y_2(x_0), \\ y'_{1x}(x_0, c) = y'_2(x_0). \end{cases} \quad (6)$$

Если система (6) при произвольном  $x_0$  имеет решение  $c = c(x_0)$ , то функция  $y = y_2(x)$  является особым решением, а ее график – огибающей семейства интегральных кривых  $y = y_1(x, c)$ .

**Пример 5.** Найти огибающую семейства интегральных кривых уравнения

$$1 + y'^2 = \frac{1}{y^2}.$$

**Решение.**

1) Найдем общее решение уравнения:



$$1 + y'^2 = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow y'^2 = \frac{1 - y^2}{y^2} \Leftrightarrow$$

$$y' = \pm \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad 1 - y^2 \geq 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm dx,$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(1 - y^2)}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm \int dx + C, \sqrt{1 - y^2} = \pm(x + C).$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем общий интеграл

$$(x + C)^2 + y^2 = 1.$$

Как видим, общий интеграл геометрически описывает семейство окружностей радиуса 1, расположенных в полосе  $-1 \leq y \leq 1$ .

2) В процессе нахождения общего решения мы упустили из рассмотрения значения  $y$ , удовлетворяющие условию  $1 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$ . Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функции  $y = \pm 1$  являются его решениями. Проверим, являются ли эти функции особыми решениями.

Пусть  $y_1 = \sqrt{1 - (x + C)^2}$  – общее решение, соответствующее верхней полуокружности,  $y_2(x) = 1$ .

Условие (6) в этом случае запишется в виде

$$\begin{cases} \sqrt{1 - (x_0 + C)^2} = 1, \\ \frac{-(x_0 + C)}{\sqrt{1 - (x_0 + C)^2}} = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет решение  $C = -x_0$ , т.е. прямая  $y = 1$  в каждой своей точке  $(x_0; 1)$  касается семейства кривых  $(x + C)^2 + y^2 = 1$ . Таким образом, прямая  $y = 1$  является огибающей данного семейства (рис. 6).

Аналогично рассматривается случай

$$y_1 = \sqrt{1 - (x + C)^2}, \quad y_2(x) = -1.$$

Особое решение можно найти и по-другому, например, с помощью  $p$  – дискриминанта (4). Для этого запишем исходное дифференциальное уравнение в неявном виде

$$1 + y'^2 - \frac{1}{y^2} = 0$$

и продифференцируем по  $y'$

$$2y' = 0 \Leftrightarrow y' = 0.$$

Подставляя данное значение  $y'$  в исходное уравнение, получаем

$$1 - \frac{1}{y^2} = 0,$$

откуда находим особые решения  $y = 1$  и  $y = -1$ .

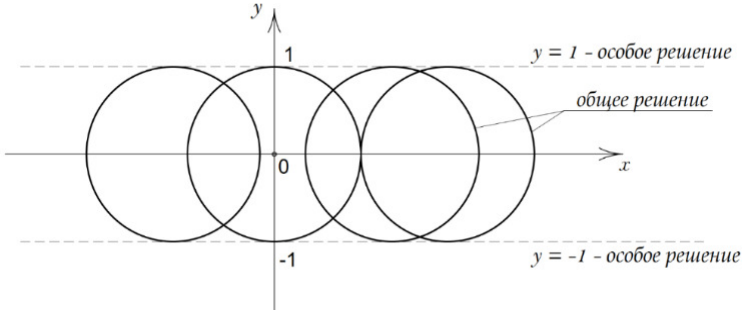


Рис. 6

Особое решение также можно найти с помощью  $c$  – дискриминанта (5). Для этого запишем общий интеграл в неявном виде

$$(x + C)^2 + y^2 - 1 = 0$$

и продифференцируем по  $C$

$$2(x + C) = 0 \Leftrightarrow x + C = 0.$$

Подставляя данное значение  $x + C$  в общее решение, получаем  $y^2 - 1 = 0$ , т.е.  $y = \pm 1$  – особые решения.

Рассматривая геометрические приложения дифференциальных уравнений первого порядка, нельзя обойти вниманием уравнения Клеро  $y = xy' + \psi(y')$ , поскольку, во-первых, эти уравнения и получаются из свойств касательной, а, во-вторых, особое решение этих уравнений геометрически представляет собой весьма интересную кривую.

**Пример 6.** Найти кривую, отрезок касательной к которой, заключенный между осями координат, является величиной постоянной, независимой от точки касания [3].

**Решение.**

Введя те же обозначения, что в примере 1 (см. рис.1), и произведя аналогичные выкладки, получим уравнение Клеро

$$y = xy' \pm \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой семейство прямых

$$y = Cx \pm \frac{Ca}{\sqrt{1 + C^2}},$$

а особое решение – огибающую указанного семейства прямых – астроида. Уравнение астроида в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Из рассмотренных выше примеров очевидно, что в решении даже самых простых задач такого типа сводятся воедино знания практически по всем ранее изученным разделам высшей математики: векторной алгебре, кривым второго порядка, дифференциальному и интегральному исчислению, и, собственно, дифференциальным уравнениям. То есть для успешного усвоения предлагаемого материала студенту необходимо:

- знать основные понятия и формулы по темам: векторная алгебра, кривые второго порядка, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения;

- уметь определять координаты точки и вектора в прямоугольной декартовой системе координат; вычислять длину вектора, составлять уравнения касательной и нормали; вычислять производные; дифференциалы и интегралы основных элементарных функций;

- владеть методами решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Авторы надеются, что работа над данной темой в объеме двух часов семинара позволит не только расширить кругозор студента по теме дифференциальные уравнения, но и закрепить ранее пройденный материал, что, несомненно, повысит математический уровень обучающихся и самым положительным образом скажется на успеваемости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для втузов. В 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. М.: Высш. шк., 1986. 365 с.
2. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. М.: Высш. шк., 1989. 383 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 2 т. Т.2 / В.И. Смирнов. М.: Наука, 1974. 655 с.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 51-7:66.048

**А. И. Балунов, М. А. Смирнов**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@ystu.ru

## **АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РАСЧЕТА КОЛОНН РЕКТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ЭНТРОПИЙНОГО МЕТОДА ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА**

*Рассмотрены метод, алгоритмы и программное приложение для расчета ректификационных колонн, разделяющих многокомпонентные смеси, близкие к идеальным. Метод основан на информационном принципе максимальной энтропии, позволяющем найти наиболее вероятные значения основных режимных и конструктивных параметров колонны при соблюдении балансовых ограничений. Приведены алгоритмы проектного и поверочного расчета колонны. В проектном расчете при заданных ограничениях на качество продукта разделения определению подлежат составы потоков колонны и число равновесных или неравновесных ступеней разделения в каждой из секций. В поверочном расчете при заданных параметрах, косвенно характеризующих высоту колонны, подлежат определению составы продуктов разделения. Оба алгоритма реализованы в программном приложении, которое может быть использовано для поддержки принятия решений как при проектировании новых ректификационных аппаратов, так и при оптимизации действующих аппаратов.*

***Ключевые слова:** ректификация, математическое моделирование, принцип максимальной энтропии, алгоритм расчета, оптимизация, программное приложение*

**A. I. Balunov, M. A. Smirnov**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@ystu.ru

## **ALGORITHMS AND SOFTWARE COMPLEX FOR CALCULATING RECTIFICATION COLUMNS BASED ON THE ENTROPIC METHOD OF DESCRIBING THE PROCESS**

*The method, algorithms and software application for the calculation of rectification columns separating multicomponent mixtures close to ideal are considered. The method is based on the information principle of maximum entropy, which makes it possible*

*to find the most probable values of the main operating and design parameters of the column while observing the balance constraints. Algorithms for design and verification calculation of the column are presented. In the design calculation, given the constraints on the quality of the separation products, the compositions of the column streams and the number of equilibrium or non-equilibrium separation stages in each of the sections are to be determined. In the verification calculation for the given parameters, which indirectly characterize the height of the column, the compositions of the separation products are to be determined. Both algorithms are implemented in a software application that can be used to support decision-making both in the design of new rectification apparatus and in the optimization of existing apparatus.*

**Keywords:** *fractioning, mathematical simulation, maximum entropy principle, calculation algorithm, optimization, software application*

**Введение.** В последние десятилетия для решения различных инженерных задач в условиях неопределенности широко используется информационный принцип максимальной энтропии, который позволяет получить наиболее вероятный результат на основе имеющейся достоверной, но неполной исходной информации [1]. В литературе он также известен как формализм Джейнса [2, 3] и энтропийный метод моделирования [4].

С середины семидесятых годов прошедшего века, в работах научной школы В.П. Майкова развивается энтропийно-информационный подход к моделированию и оптимизации процессов химической технологии [5–13]. В этом подходе принцип максимальной энтропии используется для математического описания технологических процессов. Наиболее полно среди них разработана теория ректификации, при описании которой закон распределения компонентов в потоках колонны принимается наиболее вероятным, отвечающим максимуму информационной энтропии при соблюдении балансовых ограничений. В число ограничений входит также уравнение, характерное для энтропийного метода моделирования, которое вводит свойства компонентов и задает степень разделения потоков при постановке задачи [5–7].

При математическом описании многокомпонентной ректификации смесей, близких к идеальным, критерием максимального правдоподобия является энтропия Шеннона, оценивающая неопределенность присутствия в смеси микрочастиц (молекул) каждого компонента. Поскольку в таких смесях вероятность обнаружения частиц определенного типа равна их мольной доле, то шенноновскую энтропию можно рассчитать на основе мольного состава смеси [5–7]. В общем случае эта вероятность связана с размером микрочастиц. Поэтому при описании процессов разделения смесей, неидеальность которых обусловлена различием молекул компонентов по размерам (атермальные смеси), предложена расширенная версия принципа максимальной энтропии [8–11]. В ней критерием правдоподобия яв-

ляется информационная энтропия сложного опыта, включающая условную энтропию и условные вероятности. Учет атермальных свойств смеси в общей постановке и решении задачи приводит к зависимостям, в которые входят коэффициенты активности в характерной для термодинамики форме. Зависимости для идеальных смесей воспроизводятся как частный случай.

При описании процессов разделения непрерывных (нефтяных) смесей критерием правдоподобия является информационная энтропия непрерывного множества [12, 13].

Таким образом, энтропийный метод позволяет на единой методологической основе проводить описание процесса ректификации как идеальных [7], так и неидеальных (атермальных) смесей [9], как многокомпонентных [7–10], так и непрерывных систем [12, 13].

При оптимизации процессов разделения на основе энтропийно-информационного подхода основной целевой функцией является критерий оценки степени организованности системы [14]:

$$\eta = \frac{H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}}}{H_{\text{вх}}}.$$

Здесь  $H_{\text{вх}}$ ,  $H_{\text{вых}}$  – информационные энтропии, оценивающие неупорядоченность потоков на входе и выходе системы. С помощью критерия  $\eta$  удобно оценивать разделительную способность ректификационной колонны – чем больше  $\eta$ , тем выше разделительная способность колонны и тем лучше качество разделения. Максимально возможная разделительная способность соответствует  $\eta = 1$ . Это отвечает гипотетическому случаю разделения бинарной смеси на чистые продукты или многокомпонентной смеси на две чистые фракции. Наоборот, когда процесс сводится к простому делению смеси на две части одинакового исходного состава, то  $\eta = 0$ .

В термодинамической интерпретации критерий  $\eta$  представляет собой отношение термодинамической работы разделения исходной смеси, близкой к идеальной, на заданные продукты к аналогичной работе разделения на чистые продукты. Известно, что такой критерий не противоречит критерию, построенным на технико-экономической оценке [15].

## 1. Математическая модель процесса

Энтропийный метод моделирования позволяет представить сложную задачу описания процесса ректификации в виде решения ряда более простых задач.

Первая задача – определение наиболее вероятных составов продуктовых потоков колонны. При её решении учитывается, что связь между составами продуктовых потоков колонны не может быть описана во всех деталях ввиду сложности и стохастической природы процесса. Поэтому

закон распределения компонентов в продуктовых потоках находят только как наиболее вероятный из всех, которые можно было бы принять в условиях объективно существующей неопределенности.

Математическая формулировка задачи сводится к следующему: при заданных составе и свойствах разделяемой смеси, отборах продуктов и ограничениях на качество разделения требуется найти такие составы дистиллята  $x_i^+$  и кубового продукта  $x_i^-$ , которые доставляют максимум информационной энтропии выходных потоков колонны

$$H = -\varepsilon_y \sum_{i=1}^m x_i^+ \ln x_i^+ - \varepsilon_x \sum_{i=1}^m x_i^- \ln x_i^-$$

при соблюдении указанных выше ограничений. В последнем выражении:  $H$  – информационная энтропия;  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_x$  – относительные мольные отборы дистиллята и кубового продукта;  $m$  – число компонентов в смеси.

Решение этой условной экстремальной задачи для случая, когда в продуктах разделения заданы концентрации произвольного компонента  $n$ , приводит к следующим соотношениям [7]:

$$x_i^+ = z_i / \left[ \varepsilon_y + \varepsilon_x \left( x_n^- / x_n^+ \right) \left( \alpha_i / \alpha_n \right)^{-\lambda} \right], \quad i=1,2,\dots,m, \quad (1)$$

$$x_i^- = z_i / \left[ \varepsilon_x + \varepsilon_y \left( x_n^+ / x_n^- \right) \left( \alpha_i / \alpha_n \right)^{\lambda} \right], \quad i=1,2,\dots,m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_i^+ = 1. \quad (3)$$

Здесь  $z_i$  – мольная концентрация  $i$ -го компонента в питании;  $\alpha_i = \sqrt{\alpha_i^+ \alpha_i^-}$  – эффективный коэффициент относительной летучести  $i$ -го компонента;  $\alpha_i^+$ ,  $\alpha_i^-$  – коэффициенты относительной летучести  $i$ -го компонента для условий (температуры и давления) дистиллята и кубового продукта;  $\lambda$  – множитель Лагранжа в условной экстремальной задаче расчета наиболее вероятных составов.

Полученное распределение отвечает линейно-логарифмическому соотношению

$$\lambda = \ln \frac{x_i^+ x_k^-}{x_i^- x_k^+} / \ln \frac{\alpha_i}{\alpha_k}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad i \neq k,$$

совпадающему с известным уравнением Фенске-Андервуда. Таким образом, в этой задаче множитель Лагранжа  $\lambda$  имеет физический смысл минимального числа теоретических ступеней разделения, необходимых для достижения заданного качества разделения в безотборном режиме, и характеризует разделительную способность (условную высоту) колонны.

Соотношения (1)–(3) ориентированы на расчет составов продуктовых потоков колонны в проектной постановке задачи, когда при заданных требованиях к качеству разделения смеси требуется найти условную высоту колонны и составы продуктовых потоков. В этом случае значение неизвестного множителя  $\lambda$  находят в результате совместного решения уравнений (1) и (3), а составы продуктов рассчитывают по формулам (1) и (2).

В случае поверочного расчета колонны, который проводят при анализе и оптимизации действующих ректификационных аппаратов, соотношения (1) и (2) удобно преобразовать к иному виду:

$$x_i^+ = z_i / [\varepsilon_y + \varepsilon_x (\alpha_i / \alpha_{гр})^{-\lambda}], \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4)$$

$$x_i^- = z_i / [\varepsilon_x + \varepsilon_y (\alpha_i / \alpha_{гр})^{\lambda}], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_{гр}$  – эффективный коэффициент относительной летучести гипотетического граничного компонента, для которого справедливо условие  $x_{гр}^+ = x_{гр}^- = z_{гр}$ . При такой постановке задачи задают значение  $\lambda$  (параметр идентификации модели), а значение  $\alpha_{гр}$  находят в результате совместного решения уравнений (3) и (4).

Вторая задача – расчет составов в сечениях верхней (укрепляющей) и нижней (исчерпывающей) секций колонны. Последовательное применение энтропийного метода к решению этой задачи при ступенчато-противоточной схеме движения потоков в колонне приводит к соотношениям, которые для укрепляющей секции имеют вид [7]:

$$x_{pi} = y_{p-1,i} \alpha_i^{-\mu} / \sum_{i=1}^m y_{p-1,i} \alpha_i^{-\mu}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

$$y_{pi} = \frac{R}{1+R} x_{pi} + \frac{1}{1+R} x_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Здесь  $y_{pi}$ ,  $x_{pi}$  – концентрации  $i$ -го компонента в сечении  $p$  в паре и жидкости;  $R$  – флегмовое число;  $\mu$  – множитель Лагранжа, имеющий физический смысл параметра, характеризующего степень разделения выходных потоков ступени контакта.

Соотношения (6) и (7) представляют собой рекуррентные уравнения, позволяющие последовательно проводить расчет составов в укрепляющей секции как по равновесным ( $\mu = 1$ ), так и неравновесным ( $\mu < 1$ ) ступеням контакта. При  $\mu = 1$  они полностью совпадают с общепринятыми зависимостями потарелочного расчета. Однако следует отметить, что в этих соотношениях параметр  $\mu$ , характеризующий степень разделения по-



токов, не вводится извне, как, например, коэффициент полезного действия (КПД) тарелки в традиционных методах, а вытекает из решения самой задачи – это множитель Лагранжа в условной экстремальной задаче.

Для исчерпывающей секции зависимости, аналогичные (6) и (7), имеют вид

$$y_{pi} = x_{p-1,i} \alpha_i^\mu / \sum_{i=1}^m x_{p-1,i} \alpha_i^\mu, \quad i=1,2,\dots,m,$$
$$x_{pi} = \frac{S}{1+S} y_{pi} + \frac{1}{1+S} x_i^-, \quad i=1,2,\dots,m.$$

Здесь  $S$  – паровое число. Нумерация сечений в секциях колонны идет от продуктовых потоков к узлу питания.

Однако довольно часто бывает неизвестна не только структура потоков внутри ступени контакта, но и сам принцип разбиения колонны на отдельные ступени контакта, как, например, это имеет место при расчете насадочных колонн. В этом случае секции колонны рассматривают как эффективные ступени контакта со сложной гидродинамической структурой потоков, для которых  $\mu > 1$ . Здесь множитель Лагранжа  $\mu$  оценивает степень разделения потоков, покидающих рассматриваемый объем колонны, и выступает в качестве обобщенной координаты процесса или условной высоты по типу множителя  $\lambda$ . Последовательно задавая  $\mu$ , по уравнениям (4), (5) для верхней секции и (6), (7) для нижней, можно рассчитать составы потоков в сечениях колонны от граничных (нулевых) до примыкающих к узлу питания [7, 8].

На основе зависимостей (5)–(8) в результате предельного перехода от ступенчатого противотока с конечной протяженностью процесса к непрерывному противотоку легко получить расчетные выражения для противотока полного вытеснения [7, 8]. В них множитель Лагранжа  $\mu$  характеризует степень разделения встречных потоков пара и жидкости в сечении колонны.

Третья задача – расчет составов в сечениях оптимального узла питания. При разделении смеси происходит снижение неупорядоченности исходного потока, оцениваемой энтропией, естественно потребовать, чтобы работа каждой части колонны была подчинена этой цели. Однако в узле питания вследствие смешения потоков неупорядоченность не только не уменьшается, но даже несколько возрастает. Следовательно, оптимальное место ввода питания в колонну должно обеспечивать минимально возможное повышение неупорядоченности. В результате решения этой оптимизационной задачи получены зависимости для расчета таких составов потоков пара и жидкости в сечениях узла питания, которые минимизируют в нем производство энтропии [7].

Таким образом, в этой оптимизационной задаче реализуется принцип минимальной энтропии, в отличие от рассмотренных задач математического описания процесса, в которых использовался прямо противоположный принцип максимальной энтропии.

## 2. Алгоритмы расчета

Последовательное решение рассмотренных трех основных задач позволяет сформулировать два алгоритма расчета колонны в зависимости от объема исходной информации. Первый из них называют «основным», а второй – «декомпозиционным». Оба алгоритма применяют как при проектном, так и поверочном расчете. Общей исходной информацией для них является: мольный состав разделяемой смеси, относительные мольные отборы продуктов, доля испаренности и фазовый состав питания, флегмовое число, КПД массообменных тарелок и значения эффективных относительных летучестей компонентов. Кроме этого, в случае проектного расчета колонны задают концентрацию целевого компонента в одном из продуктов разделения (как для основного, так и декомпозиционного алгоритма) и значение параметра  $\lambda$ , характеризующего условную высоту одной из секций (только для декомпозиционного алгоритма). В случае поверочного расчета задают либо параметр  $\lambda$ , характеризующий условную высоту всей колонны (основной алгоритм), либо значения этих параметров для каждой из секций (декомпозиционный алгоритм).

Остановимся на расчете эффективных значений коэффициентов относительных летучестей компонентов по формуле  $\alpha_i = \sqrt{\alpha_i^+ \alpha_i^-}$ , а далее вернемся к рассмотрению алгоритмов расчета колонны.

Необходимые для расчета  $\alpha_i$  коэффициенты относительной летучести  $\alpha_i^+$  и  $\alpha_i^-$  первоначально находят для температур дистиллята и кубового продукта, оцениваемых приближенно. После определения составов продуктовых потоков колонны эти температуры уточняют и в случае необходимости расчет  $\alpha_i^+$  и  $\alpha_i^-$  повторяют. Поскольку в дефлегматоре дистиллят, отбираемый в виде пара известного состава  $x_i^+$ , находится в состоянии термодинамического равновесия с жидкостью, образующейся в результате конденсации, то при фиксированном давлении вверху колонны температуру в дефлегматоре можно найти из условия фазового равновесия в результате решения уравнения изотермы паровой фазы. Температуру в кубе колонны, где в состоянии термодинамического равновесия находится кубовый продукт известного состава  $x_i^-$ , можно найти аналогично, решая уравнение изотермы жидкой фазы. Оба уравнения в большинстве случаев

могут быть разрешены относительно температуры только численно, но в силу своих особенностей имеют единственный действительный корень [16].

По основному алгоритму расчет колонны проводят в следующей последовательности [10].

На первом этапе определяют составы продуктовых потоков колонны, а при проектном расчете еще и значение параметра  $\lambda$  (минимальное число теоретических ступеней контакта в безотборном режиме).

На втором этапе определяют составы потоков в сечениях оптимального узла питания.

На третьем – рассчитывают составы в сечениях секций колонны и определяют число равновесных или неравновесных ступеней контакта в каждой из них при заданной степени разделения выходных потоков ступени  $\mu$ . Расчет проводят по приведенным выше рекуррентным соотношениям от сечения к сечению в направлении от продуктовых потоков к узлу питания. В частном случае, когда паровой поток вверху колонны конденсируется в полном конденсаторе, а кубовый продукт испаряется в полном испарителе, составы потоков в концевых сечениях колонны принимают равными составам продуктовых потоков. В общем случае, при парциальных конденсаторе и кипятильнике составы в концевых сечениях колонны рассчитывают с привлечением известных зависимостей однократной конденсации и испарения.

Условием стыковки секций с узлом питания является равенство осредненных энергетических характеристик в граничных сечениях секций колонны и узла питания [7]. Для соблюдения этого условия необходимо варьировать значение степени разделения потоков на ступенях контакта, примыкающих к узлу питания, что равносильно их дроблению.

Важно отметить, что составы дистиллята и кубового продукта, рассчитанные по основному алгоритму, не зависят от флегмового режима и места ввода питания, т.е. принимается, что заданному разделению может отвечать множество конструктивных и режимных параметров, которые определяют на следующих этапах расчета. Если же эта информация (или часть ее) известна, то можно несколько уточнить решение задачи, используя декомпозиционный алгоритм расчета, который содержит только два этапа [17].

На первом этапе находят наиболее вероятные распределения компонентов в граничных сечениях секций колонны. Расчет секции, на качество продуктового потока которой наложено ограничение, проводят, используя соотношения (1)–(3), а секций с фиксированными параметрами  $\lambda$ , используя соотношения (3)–(5). При этом входным потоком укрепляющей секции является суммарный поток пара, поступающего в нее из узла питания, и жидкости, поступающей из дефлегматора, а исчерпывающей – сум-

марный поток жидкости, поступающей из узла питания, и пара из кипятильника. Связь между материальными потоками секций определяется уравнениями материального баланса узла питания. Поскольку составы выходных потоков секций зависят от составов входных потоков, которые первоначально не известны, расчет носит итерационный характер и заключается в многократном поочередном расчете каждой из секций до стабилизации составов в граничных сечениях. Практика расчетов показала, что составы потоков стабилизируются с точностью до четвертого знака после запятой за 5–7 итераций. При завершении расчета становится известной вся информация, необходимая для дальнейшего независимого расчета каждой из секций колонны, поэтому можно считать, что проведена декомпозиция колонны (системы) на две подсистемы – исчерпывающую и укрепляющую секции.

На втором этапе проводят расчет секций колонны аналогично основному алгоритму, используя полученные на первом этапе распределения компонентов в граничных сечениях секций колонны.

Отметим, что хотя декомпозиционный алгоритм и приводит к необходимости введения итерационных процедур, последние здесь значительно проще и надежнее в сравнении с традиционными методами расчета. При этом алгоритм сохраняет основные преимущества энтропийного метода моделирования – меньший объем исходной информации и существенное сокращение времени расчета.

### **3. Функционал программного приложения**

Для моделирования и оптимизации процесса ректификации многокомпонентных смесей на основе энтропийно-информационного подхода разработано специальное программное приложение, в котором реализованы оба рассмотренные алгоритма расчета [18].

С целью удобства алгоритмизации в нем первоначально для выбранного варианта расчета находят составы продуктовых потоков колонны, соответствующие безотборному режиму (первый этап основного алгоритма), а затем в зависимости от выбранного алгоритма рассчитывают составы либо в оптимальном узле питания, либо в граничных сечениях секций колонны. После этого находят составы в сечениях верхней и нижней секций колонны и рассчитывают значение критерия оптимальности (рис. 1).

В программном приложении предусмотрена возможность выбора языка интерфейса пользователя. Основное окно интерфейса на русском языке с активной вкладкой «Основные результаты» показано на рис. 2, а на английском языке с активной вкладкой «Профили концентраций» – на рис. 3.

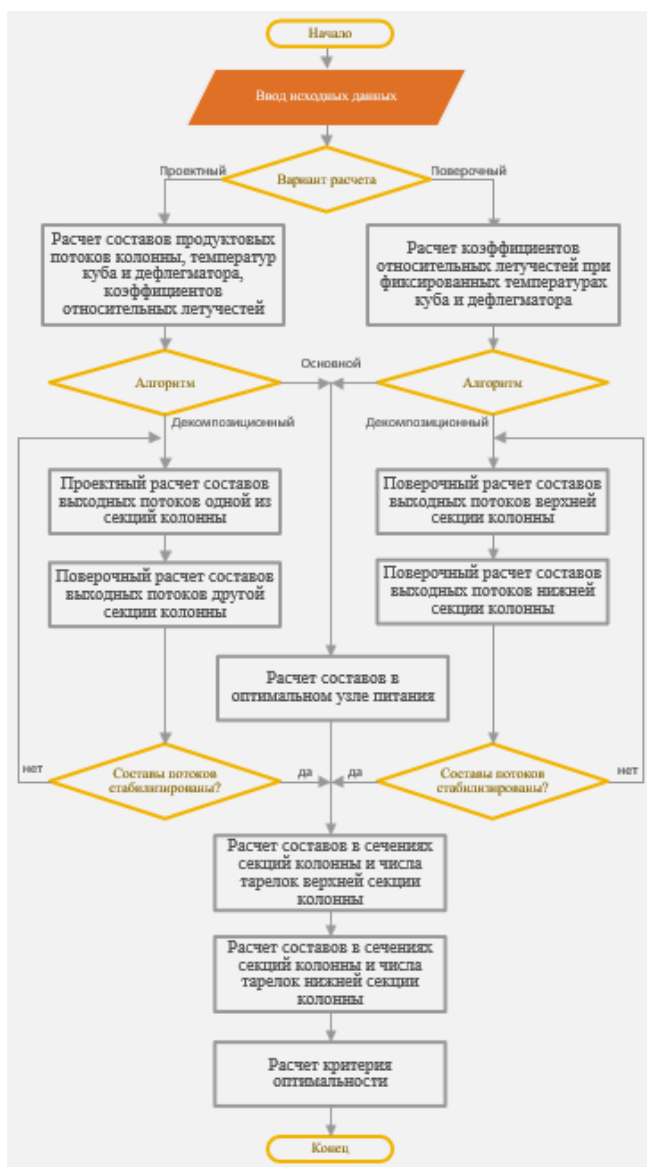


Рис. 1. Блок-схема алгоритма расчета ректификационной колонны

В левой части основного окна выбирают алгоритм (основной или декомпозиционный) и вариант (проектный или поверочный) расчета колонны, а также вводят новые исходные данные или загружают ранее введенные из сохраненных файлов. При этом возможен ввод или загрузка либо предварительно рассчитанных значений эффективных относительных летучестей компонентов, либо данных, необходимых для их расчета в самом приложении. Такими данными являются: давление в колонне, температуры в кубе и дефлегматоре, а также эмпирические коэффициенты уравнения Антуана зависимости давления насыщенных паров компонентов от температуры. Значения этих коэффициентов для большинства веществ табулированы и приведены в справочной литературе, например, [19]. Также в левой части основного окна можно ввести экспериментальные составы продуктовых потоков колонны и провести идентификацию математической модели в поверочной постановке задачи. В результате идентификации определяется значение множителя Лагранжа  $\lambda$ , который характеризует условную высоту колонны.

В правой части окна в шести вкладках: «Основные результаты», «Узел ввода подробно», «Сечения колонны», «Профили концентраций», «Профиль температур», «Идентификация» представлены результаты расчетов в табличной и графической форме, которые также можно вывести на печать.

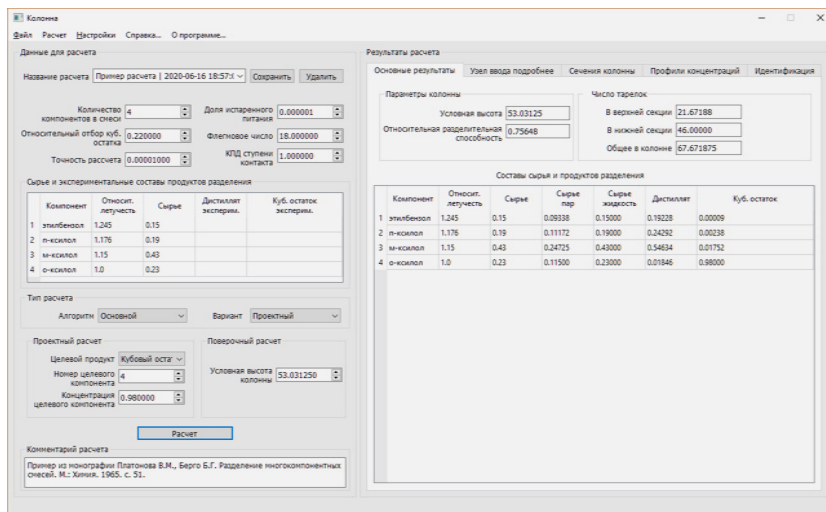


Рис. 2. Интерфейс приложения: вкладка «Основные результаты»

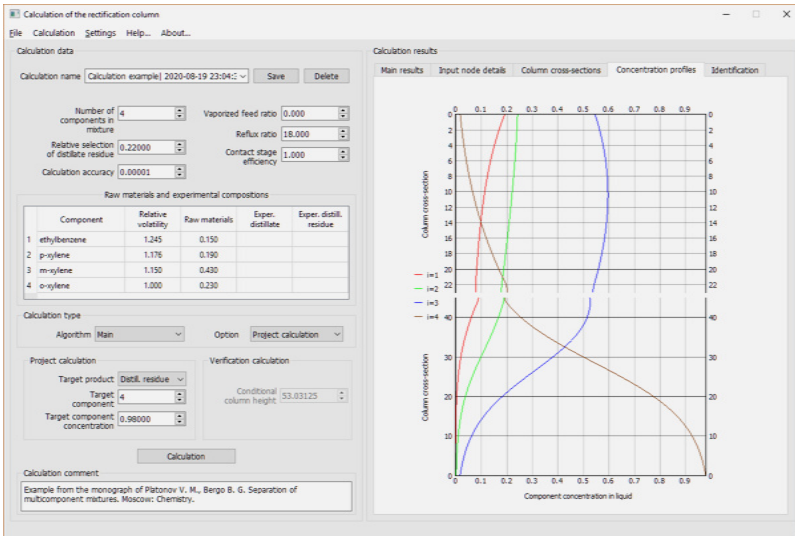


Рис. 3. Интерфейс приложения: вкладка «Профили концентраций»

Приложение разработано на языке Python с использованием сторонних библиотек: «Pyside2», «NumPy», «PyQtGraph», «SciPy» и «PyFPDF».

**Закключение.** Предложены алгоритмы и программное приложение, позволяющие на основе ограниченной исходной информации определить наиболее вероятные составы потоков и значения основных режимных и конструктивных параметров колонн ректификации многокомпонентных смесей.

Приложение может быть использовано для поддержки принятия решений как при проектировании новых ректификационных аппаратов, так и при оптимизации действующих аппаратов. Также оно может быть включено в системную стратегию расчета многоколонных ректификационных установок в качестве одного из иерархических уровней [9].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jaynes E.T. Probability theory: The logic of science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 727 p.
2. Трайбус М. Термостатика и термодинамика. М.: Энергия, 1970. 504 с.
3. Марон А.И. Оценка качества обслуживания сложных технических устройств на основе информационного принципа Джейнса // Бизнес-информатика. 2016. Т. 38, № 4. С. 47–51.

4. Вильсон А.Дж. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978. 248 с.
5. Процессы и аппараты химической технологии. Системно-информационный подход / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1977. 160 с.
6. Майков В.П. Энтропийные методы моделирования технологических процессов. М.: МИХМ, 1982. 88 с.
7. Балунув А.И. Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунув, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, № 9. С. 54–67.
8. Балунув А.И. Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунув, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, № 12. С. 93–99.
9. Балунув А.И. Описание процесса многокомпонентной ректификации на основе расширенного принципа максимальной энтропии / А.И. Балунув, В.П. Майков // Изв. МГТУ «МАМИ». 2014. Т. 3, № 4 (22). С. 31–44.
10. Балунув А.И. Расчет составов продуктовых потоков сложных ректификационных систем на основе расширенной версии принципа максимальной энтропии // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2020. Т. 63, № 1. С. 99–104.
11. Майков В.П. Условная энтропия в описании свойств атермальности / В.П. Майков, А.И. Балунув // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2004. Т. 47, № 8. С. 76–81.
12. Майков В.П. Расчет составов дистиллята и кубового продукта при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей на основе вероятностной (информационной) модели / В.П. Майков, К.К. Моругин, Н.М. Караваев // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1157–1160.
13. Балунув А.И. Термодинамический метод расчета составов продуктов разделения при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей / А.И. Балунув, О.В. Дзюба, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 1996. Т. 39, № 1–2. С. 86–89.
14. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. М.: URSS, 2017. 430 с.
15. Чайченец Н.С. Исследование связи термодинамических и технико-экономических критериев оптимальности в ректификационных системах, разделяющих идеальные смеси / Н.С. Чайченец, В.П. Майков, И.П. Усюкин // Теоретич. основы хим. технологии. 1977. Т. 11, № 4. С. 598–605.
16. Цирлин А.М. Математическая модель процесса ректификации и выбор порядка разделения многокомпонентных смесей / А.М. Цирлин, И.А. Сукин, А.И. Балунув // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 47–61.
17. Балунув А.И. Декомпозиционный алгоритм расчета многокомпонентной ректификации // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2011. Т. 3. С. 65–67.
18. Балунув А.И. Расчет колонн многокомпонентной ректификации / А.И. Балунув, М.А. Смирнов, С.Ю. Бойков // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020666085, 04.12.2020. Заявка № 2020665411 от 26.11.2020.
19. Рид Р. Свойства газов и жидкостей. Справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. Л.: Химия, 1982. 592 с.



УДК 51-7:665.123:681.5.015.26:519.2

**М. С. Белинов, М. А. Гончарова,  
М. А. Червочкин, В. В. Соловьев**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: *Mchervochkin@yandex.ru,*  
*solovyovvv@ystu.ru, belka0762@gmail.com*

**РАЗРАБОТКА СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ОПЫТНО-ПРОМЫШЛЕННОГО РЕАКТОРА  
НЕПРЕРЫВНОГО КАРБОНАТНОГО ОМЫЛЕНИЯ ЖИРА**

*В работе представлен анализ литературных источников и технологических режимов промышленных установок по получению технического жира из мясокостных отходов на агропромышленных предприятиях птицеводства, а также математическое описание процесса карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке, полученной из отходов производства на предприятии АО «Ярославский бройлер», для реализации расчетных данных на опытно-промышленной установке непрерывного карбонатного омыления жира.*

**Ключевые слова:** *вторичные ресурсы, опытно-промышленная установка, методы получения технического жира, математическое описание процесса карбонатного омыления жира*

**M. S. Belinov, M. A. Goncharova,  
M. A. Chervochkin, V. V. Solovyov**

**DEVELOPMENT OF A STATISTICAL MODEL  
OF A PILOT-INDUSTRIAL REACTOR FOR CONTINUOUS  
CARBONATE SAPONIFICATION OF FAT**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: *Mchervochkin@yandex.ru,*  
*solovyovvv@ystu.ru, belka0762@gmail.com*

*The paper presents an analysis of literature sources and technological modes of industrial installations for the production of technical fat from meat and bone waste at agro-industrial poultry enterprises, as well as a mathematical description of the process of carbonate saponification of fat contained in meat and bone meal obtained from production waste at the Yaroslavl Broiler JSC enterprise for the implementation of calculated data on a pilot plant for continuous carbonate saponification of fat.*

**Keywords:** *secondary resources, pilot plant, methods of obtaining technical fat, mathematical description of the process of carbonate saponification of fat*

Ежегодно в мясной отрасли России образуется более 1 млн т вторичных ресурсов, из которых промышленно перерабатывается только 20–30% [1, 2]. В отличие от этой ситуации АО «Ярославский бройлер» занимает одно из лидирующих позиций по комплексной переработке куриного сырья и его отходов [3-5]. Это позволяет акционерному обществу более рационально использовать технологический потенциал, а также постоянно увеличивать объем и ассортимент выпускаемой продукции [6].

Однако на предприятии АО «Ярославский бройлер» существует проблема, связанная с выделением жира из отходов технологического сырья во время приготовления мясокостной муки, а также его дальнейшего слива из варочных котлов с перспективой повышения качества получаемого продукта.

В предлагаемой работе рассматриваются вопросы частичного решения данной проблемы, которые заключаются в разработке технологии выделения жира из отходов технологического сырья во время приготовления мясокостной муки, путем проведения процесса омыления исходного сырья щелочными компонентами, с последующим разложением образовавшегося мыла минеральными кислотами.

Анализ литературных источников [1-6], а также технологических режимов большинства работающих установок по получению технического жира из мясокостных отходов на агропромышленных предприятиях птицеводства [7-10] показал, что:

- сегодня отечественными и зарубежными производителями установок по переработке мясокостных отходов предлагаются различные варианты переработки костей на мясоперерабатывающих предприятиях мощностью 3, 5, 10, 15, 20, 30 и свыше 30 т мяса в смену [11];

- основные технологические решения, заложенные в работу этих промышленных установок, основываются на химическом составе конкретных костей скелета животных или мясоптицы [12-15];

- кости и мясокостные отходы с высоким содержанием жира (например, трубчатые) предлагается обезжиривать и вырабатывать из них технический, и даже пищевой костный жир [16];

- для переработки трубчатой кости успешно применяются линии вибрационного обезжиривания Я8-ФОБ и ее модификаций - Я8-ФОБ-М, которые позволяют перерабатывать любые виды кости с получением костной муки жирностью менее 10% мас. [17];

- для осуществления эффективной переработки кости на предприятиях мощностью до 15 т мяса в смену могут использоваться линии, где за счет кратковременной обработки и умеренных температурных режимов обеспечивается высокий выход высококачественных пищевого жира и кормовой муки [18];

- хорошие результаты и экологическая безопасность производства достигаются при применении линии переработки кости Я8-ФЛК (изготовитель – ООО «Асконд-промоборудование»), на которой возможно перерабатывать почти все виды кости и костного остатка, с обеспечением практически полного исключения потерь при одновременном увеличении выхода высококачественного технического или пищевого жира и биологически ценной кормовой муки [19];

- разработаны модификации линии с сушилками периодического действия, позволяющие перерабатывать любое сырье, в том числе и павших животных, с гарантированной стерилизацией муки и жира: Я8-ФОБМА-05П – до 500 кг/ч сырья и Я8-ФОБ-МА06П – до 1000 кг/ч (изготовитель – ООО «Асконд-промоборудование») [20];

- на предприятиях малой мощности, у которых количество отходов в сутки не превышает 1–2 т, возможно применение мини-линий двух модификаций – с применением пара и электричества. Так, например, на линии МЛ-А16 можно перерабатывать до 800 кг в смену сырья с применением пара, а на линии МЛ-А16-01 – используется электрическая энергия. Производительность линий МЛ-А16М (рис. 3) и МЛ-А16М-01 – до 1500 кг в смену, а линий МЛ-А16М2 и МЛ-А16М2-01 – до 3000 кг в смену (изготовитель – ООО «Асконд-промоборудование») [21];

- для получения кормовой костной муки более высокой биологической ценности во ВНИИ мясной промышленности им. В.М. Горбатова разработана принципиально новая безотходная технология, которая позволяет кратковременно обрабатывать кости при умеренных температурах сухим способом (без контакта с водой, жестким паром). Создана технологическая линия Я8-ФЛК для переработки костей, на которой процесс обезжиривания идет в две стадии: сначала в течение 11 мин за счет кондуктивного нагрева до температуры 85–90 °С с непрерывным отводом вытопленного жира и образовавшихся соковых паров, а затем путем фильтрационного центрифугирования в течение 3–4 мин при температуре 70–80 °С. Обезжиренные кости подвергают непрерывной сушке в течение 30–35 мин, измельчению и просеванию. Полученная кормовая костная мука содержит в среднем на 70% больше протеина, чем мука, произведенная по традиционной технологии [22].

Таким образом, анализ предлагаемых промышленных установок и технологических решений при переработке мясокостных отходов с последующим выделением жира из отходов технологического сырья во время приготовления мясокостной муки показал, что:

- при выборе той или иной технологии переработки отходов мясокостных продуктов необходимо учитывать особенности морфологического и химического состава имеющегося на конкретном предприятии (ОА

«Ярославский бройлер») сырья в зависимости от вида перерабатываемого мяса птицы;

- необходимо иметь примерный углеводородный состав мясокостных отходов и их конкретные физико-химические показатели (кислотное число, число омыления, иодное число и т.д.);

- при разработке статистической модели опытно-промышленного реактора для первичной переработки мясокостных отходов необходимо предложить наиболее ресурсосберегающую технологию переработки мясокостной муки для предприятия АО «Ярославский бройлер»;

- провести анализ наличия технических средств для внедрения предлагаемой технологии переработки мясокостных отходов, а также рассмотреть возможные пути использования и реализации получаемой продукции.

В ходе предварительных исследований было показано, что реализация процесса переработки мясокостных отходов с выделением технического или пищевого жира на предприятии ОА «Ярославский бройлер» может быть осуществлена по технологии отличной от ранее рассмотренных процессов традиционной переработки мясокостных отходов, которая включает:

- омыление мясокостных отходов щелочными агентами;
- разработка статистической модели опытно-промышленного реактора непрерывного карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке;
- оптимизация процесса карбонатного омыления с получением максимально возможного выхода по омыленным продуктам;
- разложение полученного жирнокислотного мыла раствором слабой кислоты.

Создание высокоинтенсивного непрерывного процесса омыления, оптимизация и его автоматическое управление требуют глубокого и всестороннего изучения как механизма процесса, так и его количественного описания в виде математических моделей. Поэтому вторая часть настоящей работы была посвящена разработке статистической модели опытно-промышленного реактора непрерывного карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке предприятия ОА «Ярославский бройлер».

Известно, что в процессе карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке, экономически целесообразно достижение максимальной глубины омыления [23]. При этом после доомыления раствором едкого натрия омыленный продукт не должен содержать большого количества углекислого натрия, отрицательно влияющего на последующие процессы производства технических жирных кислот [24]. Кроме того, карбонатная масса не должна содержать ощутимых количеств не только кар-

боната и бикарбоната натрия, но и поглощенного углекислого газа, так как последние при щелочном доомылении образуют углекислый натрий [25].

В настоящей работе управление процессом карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке, было предложено осуществлять по остаточному кислотному числу карбонатной массы. Причем при составлении математической модели этого процесса, задаваемый интервал значений несколько завышался по сравнению с теоретическими расчетными данными во избежание появления углекислого натрия в омыленном продукте. В ходе дальнейших исследований было установлено, что раствором кальцинированной соды, который использовался для практического омыления костного жира, могут быть не только нейтрализованы свободные жирные кислоты, но и омылена практически вся часть жирнокислотных веществ, присутствующих в жире костной муки [7-11].

Вопрос оптимизации карбонатного омыления становится особенно актуальным в условиях наметившегося перехода производства с периодического на непрерывный процесс, а также на сырье различного углеводородного (зачастую неизвестного) фракционного состава, и в связи с разработкой автоматической системы управления технологическими процессами производства костной муки на ОА «Ярославский бройлер». Для формирования задачи оптимизации процесса карбонатного омыления костного жира необходимо было разработать математическое описание, позволяющее выбрать технологический критерий оптимальности и определить его зависимость от входных параметров процесса [26, 27].

В ходе проведения предварительных исследований, было предложено использовать известные математические уравнения [28-30] которые достаточно широко использовались при проектировании предприятий масложировой промышленности.

В ходе исследований по результатам многократно проведенных опытов было установлено, что глубина карбонатного омыления (ГКО) может быть определена по следующему уравнению, полученному на основании материального баланса процесса:

$$\text{ГКО} = 1 - \frac{G_1 \cdot K_1}{G_{\text{ж}} \cdot K_{\text{ж}}}, \quad (1)$$

или

$$\text{ГКО} = 10,59 \cdot \frac{G_{\text{кк}} \cdot \alpha_{\text{кк}} - G_1 \cdot X}{G_{\text{ж}} \cdot K_{\text{ж}}}, \quad (2)$$

где  $G_1$  – расход карбонатной массы для омыления жира, содержащегося в мясокостной муке, г/с;

$K_1$  – коэффициент омыления жира, содержащегося в мясокостной муке, мг КОН/г;

$G_{ж}$  – расход костного жира, содержащегося в мясокостной муке для омыления, г/с;

$K_{ж}$  – коэффициент омыления костного жира, содержащегося в мясокостной муке, мг КОН/г;

$G_{кc}$  – расход раствора кальцинированной соды для омыления жира, содержащегося в мясокостной муке г/с;

$\alpha_{кc}$  – концентрация раствора кальцинированной соды, % мас.;

$X$  – суммарная концентрация щелочи для омыления жира, содержащегося в мясокостной муке  $X = X_C + 0,63 \cdot X_B$ , ( $X_C$ ,  $X_B$  – содержание соответственно углекислого натрия и бикарбоната натрия в карбонатной массе, % мас.).

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим уравнение, связывающее основные параметры качества карбонатной массы жира, содержащегося в мясокостной муке:

$$G_{ж} \cdot K_{ж} - G_1 \cdot K_1 = 10,59 \cdot (G_{кc} \cdot \alpha_{кc} - G_1 \cdot X). \quad (3)$$

Решив уравнение (3) относительно  $X$ , найдем суммарное содержание карбоната и бикарбоната натрия в карбонатной массе жира, содержащегося в мясокостной муке в пересчете на  $Na_2CO_3$ :

$$X = \frac{G_{кc} \cdot \alpha_{кc}}{G_1} - 9,446 \cdot 10^{-2} \left( \frac{G_{ж} \cdot K_{ж}}{G_1} - K_1 \right). \quad (4)$$

Если в карбонатной массе не содержится иных содопродуктов в свободном состоянии, то ее коэффициент омыления и теоретическая глубина омыления могут быть определены по предлагаемым уравнениям:

$$K_1^0 = \frac{G_{ж} \cdot K_{ж} - 10,59 \cdot G_{кc} \cdot \alpha_{кc}}{G_1}, \quad (5)$$

$$ГКО^0 = 10,59 \cdot \left( \frac{\alpha_{кc}}{K_{ж}} \cdot \frac{G_{кc}}{G_{ж}} \right). \quad (6)$$

С учетом равенств (5) и (6) уравнение (4) можно записать в следующем виде:

$$X = -9,446 \cdot 10^{-2} \cdot (K_1^0 - K_1) = -9,446 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{G_{ж} \cdot K_{ж}}{G_1} \cdot (ГКО^0 - ГКО). \quad (7)$$

При подстановке значений  $ГКО^0$  и  $ГКО$  уравнение приобретает следующий вид:

$$X = -9,446 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{G_{ж} \cdot K_{ж}}{G_1} \cdot \left( 10,59 \cdot \frac{\alpha_{кc}}{K_{ж}} \cdot \frac{G_{кc}}{G_{ж}} - (10,59 \cdot \frac{G_{кc} \cdot \alpha_{кc} - G_1 \cdot X}{G_{ж} \cdot K_{ж}}) \right). \quad (8)$$

Из уравнения (8) следует, что концентрацию содопродуктов в карбонатной массе можно определить по разности между теоретической и

достигнутой величинами коэффициента омыления карбонатной массы или глубины омыления. Так, например, увеличение теоретически возможного коэффициента омыления примерно на 5 мг КОН/г или снижение возможной глубины омыления на 6% свидетельствует о содержании в карбонатной массе около 0,5% мас. углекислого натрия в свободном состоянии.

Уравнение (8) дает возможность сформулировать критерий оптимальности процесса карбонатного омыления жира, содержащегося в мясокостной муке:

$$R = \text{ГКО} - k \cdot (\text{ГКО}^0 - \text{ГКО}) \rightarrow \max, \quad (9)$$

где  $k$  – коэффициент, определяющий чувствительность критерия  $R$  относительно  $X$  (суммарной концентрации щелочи для омыления жира) и функций ( $F_1, F_2, F_3$  и т.д.), которые задаются исходя из конкретных условий ведения процесса омыления, например:

$F_1$  – фактор, характеризующий фракционный состав исходного жира, содержащегося в мясокостной муке;

$F_2$  – фактор, характеризующий технологический режим омыления;

$F_3$  – фактор, характеризующий конструктивную особенность омылителей и т. д.).

$F_4$  – фактор, характеризующий полноту удаления образующегося углекислого газа из зоны реакции.

Так, для более полного удаления образующегося углекислого газа из зоны реакции в омылитель было предложено чередовать подачу острого пара и воздуха. При таком режиме осуществления процесса было показано, что концентрация  $\text{CO}_2$  в карбонатной массе будет находиться на минимальном значении в том случае, если его концентрация в газовой воздушном потоке, отходящем из омылителя, будет максимальной для данной глубины омыления и определенного путем расчета расхода воздуха, согласно материальному балансу процесса и приведенным уравнениям (7) и (8).

Представленные результаты исследования были выполнены в короткий срок, начиная с октября по декабрь 2021 года по заказу АО «Ярославский бройлер», и предполагают их продолжение с начала 2022 года по тематике статической оптимизации процесса карбонатного омыления, с целью получения высоких значений по оптимальной глубине карбонатного омыления (ГКО) за счет достижения необходимой интенсивности гидродинамического режима процесса. Это должно облегчить достижение оптимальности процесса по критерию (9) путем изменения основного оптимизирующего воздействия – соотношения расходов реагентов процесса омыления и последующего разложения карбонатной массы. Дальнейшие исследования будут направлены на получения данных полного математического описания статистики карбонатного омыления жира, содержащегося в

мясокостной муке, что в перспективе позволит разработать автоматическую систему управления этим процессом с помощью ЭВМ.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Букреева Е.В. Бизнес планирование как важнейший путь повышения эффективности промышленного птицеводства // Научные труды Вольного экономического общества России. 2011. Т. 151. С. 351-360.
2. Воротников И.Л. Ресурсосберегающее развитие перерабатывающих отраслей АПК / И.Л. Воротников, К.А. Петров, В.В. Кононыхин // Экономика сельскохозяйственных и перерабатывающих предприятий. 2010. № 10. С. 21-23.
3. Кувачкина Н.Н. Бизнес-планирование развития птицеводства на примере АО "Ярославский бройлер" Ярославской области // Вестник АПК Верхневолжья. - 2011. № 3. С. 97-103.
4. Воротников И.Л. Управление биологическими отходами на основе механизмов государственно-частного партнерства и экологического страхования / И.Л. Воротников, К.П. Колотырин // Научное обозрение. 2014. № 4. С. 355-359.
5. Вторичные материальные ресурсы пищевой промышленности: справочник. М.: Экономика, 1984. – 328 с.
6. Воротников И.Л. Совершенствование системы управления биологическими отходами на основе механизмов государственно-частного партнерства и экологического страхования / И.Л. Воротников, К.П. Колотырин, О.В. Власова // Экономічний часопис-XXI. 2014. Т. 1, № 9-10. С. 53-57.
7. ГОСТ 1045-73. Жир животный технический. Технические условия.
8. ГОСТ 16147-88. Кость. Технические условия
9. ГОСТ 17483-72. Жир животный кормовой. Технические условия.
10. ГОСТ 17536-82. Мука кормовая животного происхождения. Технические условия. Нормирует показатели для мясной, костной, мясокостной (1, 2, 3 сорта), кровяной и из гидролизованного пера.
11. Файвишевский М.Л. О производстве мясокостной муки в современных условиях // Мясная индустрия. 2007. № 4. С. 50-52.
12. ГОСТ 31657-2012. Субпродукты птицы. Технические условия.
13. ГОСТ 32244-2013. Субпродукты мясные обработанные. Нормирует показатели по субпродуктам, направляемым на пищевые цели и на переработку для производства пищевых продуктов.
14. ГОСТ Р. 52427-2005. Промышленность мясная. Продукты пищевые. Термины и определения.
15. ГОСТ Р. 53157-2008. Субпродукты птицы. Технические условия.
16. Гуцин В.В. Возможность нетрадиционного использования некоторых малоценных продуктов при промышленной переработке птицы / В.В. Гуцин, Л.А. Соколова. URL: <http://www.vniipp.ru/images/statya/6/29-30t.pdf>
17. Файвишевский М. Л. Костный жир и направления его использования // Хранение и переработка сельхозпродукции. 2007. № 5. С. 74-77.
18. Гунин В.Н. Управление инновациями. М.: ИнфраМ, 1999. 328 с.
19. Сертова О.С. Опыт глубокой переработки продукции животноводства: науч.-аналит. обзор. М.: ФГНУ «Росинформагротех», 2008. 92 с.



20. *Сивелькаева Т.Б.* Колбасы из мяса птицы - удачный альянс вкуса и цены // Птица и птицепереработка. 2007. № 3. С. 48-50.
21. Технология мяса и мясных продуктов. Убой и первичная переработка скота: методические указания к практическим занятиям для студентов специальности 270900 - "Технология мяса и мясных продуктов" дневной и заочной форм обучения / сост. Т. М. Гиро. Саратов: ФГОУ ВПО "Саратовский ГАУ", 2003. 20 с.
22. *Зонин В.Г.* Современная технология мясных консервированных продуктов : научное издание. СПб.: Профессия, 2008. 224 с.
23. *Цибульская С.А.* Использование субпродуктов в мясном производстве // Мясное дело. 2005. № 6. С 23-24.
24. *Ивашов В.И.* Технологическое оборудование предприятий мясной промышленности: учебное пособие. Ч. 2. Оборудование для переработки мяса. СПб.: ГИОРД, 2007. 464 с.
25. *Комаров В.П.* Проблемы использования вторичных ресурсов отраслей пищевой и перерабатывающей промышленности и их влияние на окружающую среду / В.П. Комаров, Е.И. Лебедев, Т.А. Мануйлова // Пищевая промышленность. 1998. № 2. С. 6-10.
26. *Адлер Ю.П.* Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Марков, Ю.В. Грановский. М.: Наука, 1976. 280 с.
27. *Ордынцев В.М.* Математическое описание объектов автоматизации. М.: Машиностроение, 1965. 126 с.
28. *Ашмарин Н.П.* Быстрые методы статистической обработки и планирования экспериментов / Н.П. Ашмарин, Н.Н. Васильев, В.А. Амбросов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 76 с.
29. *Налимов В.В.* Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, И.М. Чернова. М.: Наука, 1965. 96 с.
30. *Бояринов А.И.* Методы оптимизации в химической технологии / А.И. Бояринов, В.В. Кафаров. М.: Химия, 1969. 564 с.

УДК 51-7:624.072

**А. В. Васильева**

Рыбинский государственный авиационный технический университет  
им. П.А. Соловьева  
Россия, г. Рыбинск, e-mail: [vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru)

## **О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА БАЛАНСА МОЩНОСТЕЙ В ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ**

*В статье представлено применение метода баланса мощностей для построения математической модели напряженно-деформированного состояния в очаге пластических деформаций. Рассмотрен радиальный участок течения вокруг кромки матрицы при гибке в штампе широкой полосы.*

**Ключевые слова:** математическая модель, напряженно-деформированное состояние, дифференцирование, интегрирование

**A. V. Vasileva**

P.A. Solovyov Rybinsk State Aviation Technical University  
Russia, Rybinsk, e-mail: [vasileva@rsatu.ru](mailto:vasileva@rsatu.ru)

## **ON THE APPLICATION OF THE POWER BALANCE METHOD IN THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF A STRESS-STRAIN STATE**

*The article presents the application of the power balance method for constructing a mathematical model of the stress-strain state in the focus of plastic deformations. The radial section of the flow around the edge of the matrix is considered when bending a wide strip in a die.*

**Keywords:** mathematical model, stress-strain state, differentiation, integration

При изготовлении деталей методами обработки материалов давлением (ОМД) приходится решать ряд сложных инженерных задач, таких как выбор режимов обработки, учет влияния трения и механических свойств материала, подбор оборудования и оснастки. Проведение на практике предварительных экспериментов, позволяющих в дальнейшем получить деталь с заданными служебными характеристиками, требует больших затрат и дополнительных ресурсов. Поэтому в теории ОМД активно развиваются методы математического моделирования и численного экспери-

мента, позволяющие рассчитать силовые параметры операции, степень и скорость деформирования, определить в очаге пластических деформаций зоны возможного разрушения, вычислить мощность деформации и прочее.

При построении аналитических моделей процессов применяется различный математический аппарат, в том числе метод баланса мощностей, позволяющий установить картину напряженно-деформированного состояния в очаге пластических деформаций. В работе представлено применение данного метода к исследованию процессов, протекающих в радиальном участке (вокруг кромки матрицы) при гибке широкой полосы в штампе (рис. 1).

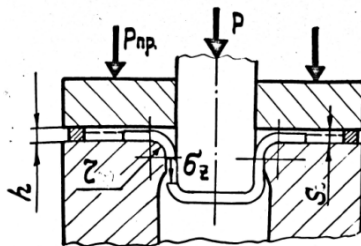


Рис. 1. Схема гибки в штампе широкой полосы

В результате математического моделирования была построена аналитическая модель течения материала, согласно которой линии тока в очаге пластических деформаций и нейтральный слой представляют собой семейство эллипсов. Задача является плоской. Описание построения модели представлено в работе [1].

Дифференцируя уравнения линий тока, записанные в полярной системе координат, можно найти компоненты скоростей течения материальных точек:

$$V_\rho = \frac{\partial U_\rho}{\partial t}; V_\theta = \frac{\partial U_\theta}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $U$  – перемещения материальных точек;  $V_\rho$ ,  $V_\theta$  – скорости перемещения данной точки в направлении радиальной и трансверсальной осей соответственно;  $t$  – время.

Скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_\rho$ ,  $\dot{\epsilon}_\theta$  по осям и скорость  $\dot{\epsilon}_{\rho\theta}$  деформации сдвига в плоскости  $\rho\theta$  определяются как частные производные от скоростей перемещений по соответствующей координате:

$$\dot{\epsilon}_\rho = \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho}; \dot{\epsilon}_\theta = \frac{V_\rho}{\rho} + \frac{\partial V_\theta}{\rho \partial \theta}; \dot{\epsilon}_{\rho\theta} = \frac{\partial V_\rho}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} - \frac{V_\theta}{\rho}. \quad (2)$$

Все компоненты были вычислены по каждой линии тока, что позволяет оценить характер распределения скоростей течения, скоростей деформаций и степеней деформации в целом, по сечению, которые для нашей модели имеют вид [2]:

- радиальная компонента скорости деформации

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \frac{\omega \cdot E^2 \cdot \sin 2(\pi / 4 - \theta)}{2(1 - E^2 \cdot \cos^2(\pi / 4 - \theta))}, \quad (3)$$

- трансверсальная компонента скорости деформации

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{\omega \cdot E \cdot \sin 2(\pi / 4 - \theta)}{2(1 - E^2 \cdot \cos^2(\pi / 4 - \theta))}, \quad (4)$$

- скорость деформации сдвига в плоскости  $\rho\theta$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\rho\theta} &= \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{\rho} = \\ &= -E^2 \omega \left[ \frac{\cos 2(\pi / 4 - \theta)}{1 - E^2 \cdot \cos^2(\pi / 4 - \theta)} + \frac{3E^2 \sin 2(\pi / 4 - \theta)}{(1 - E^2 \cdot \cos^2(\pi / 4 - \theta))^2} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где  $E$  - эксцентриситет эллипса;  $\theta = \omega \cdot t$  - угол поворота радиус-вектора;  $\omega$  - угловая скорость.

По найденным характеристикам методом баланса мощностей можно определить относительные напряжения, действующие в очаге пластических деформаций. Метод баланса мощностей основывается на методе баланса работ, где деформации и перемещения материальных точек заменяются скоростями деформаций и скоростями перемещений материальных точек. В этом случае мощность называют мощностью пластической деформации. Метод баланса мощностей имеет преимущество перед методом баланса работ, состоящее в том, что он учитывает кинематику течения материала и для его использования необходимо знать скорости материальных точек.

Суть метода заключается в том, что работа (мощность), совершаемая внешними силами на соответствующих им перемещениях, равна работе (мощности) внутренних сил. Как известно, для деформации элемента площади  $dS$  необходимо затратить работу:

$$dA = \sigma_i \cdot \varepsilon_i \cdot B \cdot dS,$$

где  $\sigma_i$  - интенсивность напряжений, МПа;  $\varepsilon_i$  - интенсивность деформаций,  $B$  - ширина участка (заготовки), мм.

Тогда полная работа деформации для всего объема:

$$A = \iint_S \sigma_i \cdot \varepsilon_i \cdot B \cdot dS.$$

Пластическая деформация наступает согласно энергетическому условию тогда, когда интенсивность напряжений  $\sigma_i$  достигает напряжения текучести  $\sigma_S$ . И тогда можно записать

$$A = \iint_S \sigma_S \cdot \varepsilon_i \cdot B \cdot dS.$$

Заменяя интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  интенсивностью скоростей деформаций  $\dot{\varepsilon}_i$ , получим выражение для полной мощности:

$$W = \iint_S \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_i \cdot B \cdot dS.$$

Используем известную зависимость для интенсивности скоростей деформаций и получаем в общем виде выражение для мощности деформаций:

$$W = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot B \int_0^{\theta} \int_{\rho_n}^{\rho_k} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \dot{\varepsilon}_\rho^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + 2\dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^2 \right)} \cdot d\theta \cdot \rho \cdot d\rho, \quad (6)$$

где  $\rho_n$ ,  $\rho_k$  - начальное и конечное положение координаты  $\rho$  по сечению заготовки.

Разобьем участок изгиба, на зоны А, Б, В, и Г (рис. 2). Будем определять мощность внутренних сил для каждого участка. Эти участки отличаются тем, что имеют разное направление деформаций а, следовательно, и скоростей деформаций. Поэтому разобьем зону пластической деформации на участки

$$W_{II} = W_A + W_B + W_B + W_\Gamma, \quad W_{II} = W_{A,B} + W_{B,\Gamma}. \quad (7)$$

Тогда можно записать:

$$W_{A,B} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot B \int_0^{\theta} \int_r^{r+S} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \dot{\varepsilon}_\rho^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + 2\dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^2 \right)} \cdot d\theta \cdot \rho \cdot d\rho$$

$$W_{B,\Gamma} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s \cdot B \int_\theta^0 \int_r^{r+S} \sqrt{\frac{1}{2} \left( \dot{\varepsilon}_\rho^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + 2\dot{\varepsilon}_{\rho\theta}^2 \right)} \cdot d\theta \cdot \rho \cdot d\rho \quad (8)$$

где  $r$  – радиус матрицы;  $S$  – толщина заготовки.

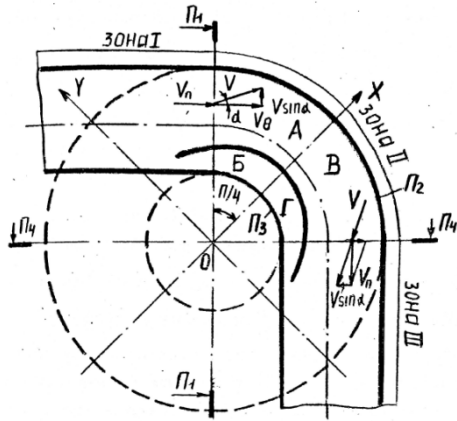


Рис. 2. К расчету мощностей внутренних сил.  
 Зоны 1 и III не деформируются. Зона II - очаг пластических деформаций.

Подставим (3), (4), (5) в формулу (8) и получим выражение мощности деформации для принятой модели течения

$$W = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma \cdot B \cdot \omega \times$$

$$\times \int_0^{\pi/4} \int_r^{r+s} \sqrt{\frac{\sin^2 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}{4 \left(1 - E^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right)} + \frac{\left(0.75E^4 \sin^2 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) - E^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)\right)^2}{1 - E^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}} d\rho \cdot d\theta.$$

Полученный интеграл не выражается в элементарных функциях и его значения могут быть найдены численными методами. Расчет может быть выполнен в каждой точке очага пластических деформаций.

Кроме мощности внутренних сил на участке II в уравнение баланса мощностей входит:

1) мощность энергии, затрачиваемой на трение по поверхности скольжения (по поверхности матрицы)  $\Pi_3$  :

$$W_{nc} = \int_0^{\pi/2} \tau \cdot V_n \cdot B \cdot dS = \frac{0.05\mu}{2\sqrt{3}} \cdot \pi \cdot \sigma_s \cdot B \cdot V_n \cdot r, \quad (10)$$

где  $V_n$  – скорость пуансона;  $dS = r \cdot d\theta$  – элемент площади;  $\tau$  – касательное напряжение, действующее на контактной поверхности и вызванное силами трения  $\tau = \mu \cdot 0.05 \cdot \sigma_s / \sqrt{3}$ ;  $\mu$  – коэффициент трения;

2) мощность, затрачиваемая на пластическую деформацию материала на поверхности разрыва скоростей  $\Pi_1 \Pi_4$ :

$$W_{np} = \int_r^{r+S} \tau \Delta V \cdot B \cdot dS = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \cdot V_n \cdot \text{tg}\alpha_{\max} \cdot B \cdot S, \quad (11)$$

где  $\Delta V = V_n \cdot \text{tg}\alpha_{\max}$  – скорость разрыва, определяемая скоростью пуансона  $V_n$  и углом  $\alpha_{\max}$  между абсолютной скоростью  $V = \sqrt{V_\rho^2 + V_\theta^2}$ , направленной по касательной к эллипсам и ее трансверсальной составляющей, взятом при наибольшем значении эксцентриситета эллипса.

Мощность внешних сил, развиваемая усилием пуансона, определяется как

$$W_{ec} = \sigma_z \cdot V_n \cdot B \cdot S, \quad (12)$$

где  $\sigma_z$  – напряжение, действующее в заготовке.

Составим баланс мощностей внутренних и внешних сил:

$$W_{ec} = 2W + W_{nc} + W_{np}. \quad (13)$$

Подставив (9), (10), (11) и (12) в формулу (13) и разделив каждое слагаемое на  $V_n \cdot S \cdot B \cdot \sigma_s$ , получим равенство

$$\frac{V_n \cdot S \cdot B \cdot \sigma_z}{V_n \cdot S \cdot B \cdot \sigma_s} = \frac{4 \cdot \omega \cdot B \cdot \sigma_s \cdot I}{\sqrt{3} \cdot S \cdot B \cdot V_n \cdot \sigma_s} + \frac{0.05 \cdot \mu \cdot \pi \cdot r \cdot B \cdot V_n}{2\sqrt{3} \cdot V_n \cdot S \cdot B \cdot \sigma_s} + \frac{\sigma_s \cdot V_n \cdot \text{tg}\alpha \cdot S \cdot B}{\sqrt{3} \cdot V_n \cdot S \cdot B \cdot \sigma_s}.$$

С учетом того, что  $\omega = V_n / (r + S/2)$ , из него следует формула для отыскания относительных напряжений, действующих в протянутой части заготовки:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_s} = \frac{4 \cdot I}{\sqrt{3} (r + S/2) \cdot S} + \frac{0.05 \cdot \mu \cdot \pi \cdot r}{2\sqrt{3} S} + \frac{\text{tg}\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (14)$$

Предложенный метод определения поля напряжений позволяет установить не только общее относительное напряжение, действующее в протянутой части заготовки и позволяющее определить требуемое для изгиба заготовки усилие, но и дает возможность определить напряжение, действующее в каждой точке протянутой заготовки на границе зоны изгиба заготовки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонов Е.А.* Теоретическое определение нейтральной линии и линий тока в участке изгиба / Е.А. Антонов, А.В. Васильева // Вестник Верхневолжского отделения Академии технологических наук Российской Федерации. Сер. Высокие технологии в машиностроении: сб. науч. тр. / РГАТА. Рыбинск, 1998. 177 с.
2. *Васильева А.В.* О построении математической модели процесса гибки широкой полосы // Материалы всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (12–16 апреля 2021 г.), г. Сибай / отв. ред. Я.Т. Суюндуков. Сибай: Сибайский информационный центр – филиал ГУП РБ, Издат. дом «Республика Башкортостан», 2021. С. 220–223.



УДК 51-7:547.1:541.66

**К. Е. Дмитриев, М. Е. Соловьев**

Ярославский государственный технический университет,  
Россия, г. Ярославль, e-mail: kirill1998d@gmail.com

## **ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИРНЫХ КИСЛОТ И ИХ ЭФИРОВ МЕТОДОМ АДДИТИВНО-ГРУППОВЫХ ВКЛАДОВ**

*Разработана модель расчета энтальпии испарения жирных кислот и их производных на основе метода аддитивно-групповых вкладов. С использованием созданной методики вычислена энтальпия испарения 7-метил-6-гексадеценовой кислоты и ее метилового эфира.*

**Ключевые слова:** моделирование, метод аддитивно-групповых вкладов, энтальпия испарения

**К. Е. Dmitriev, M. E. Solov'ev**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: kirill1998d@gmail.com

## **PREDICTION OF THERMODYNAMIC PROPERTIES OF FATTY ACIDS AND THEIR ETHERS BY THE METHOD OF ADDITIVE-GROUP CONTRIBUTIONS**

*A model has been developed for calculating the enthalpy of vaporization of fatty acids and their derivatives based on the method of additive-group contributions. Using the developed technique, the enthalpy of vaporization of 7-methyl-6-hexadecenoic acid and its methyl ester was calculated.*

**Keywords:** modeling, method of additive-group contributions, enthalpy of evaporation

**Введение.** Прогнозирование физико-химических свойств органических соединений на основании их структуры (Quantitative Structure Property Relationships - QSPR) в настоящее время прочно вошло в практику исследовательских лабораторий [1-3]. Основная идея, используемая в методах QSPR, состоит в том, чтобы закодировать каким-либо образом химическую структуру соединения и подобрать аналитическое выражение, либо численный алгоритм, отображающие множество, элементами которого являются закодированные структуры соединений (дескрипторы химиче-

ской структуры) во множество, элементами которого являются численные значения выбранного свойства. С точки зрения компьютерной химии [4, 5] данный метод является эмпирическим, однако его практическое удобство в плане возможности алгоритмизации и встраивания в системы управления базами данных химических соединений обуславливают важность этого подхода в химической информатике [6, 7]. Существует большое количество как методов кодирования химической структуры соединений, так и методов построения количественной зависимости дескрипторов со свойствами соединения. Имеется удобный бесплатный Интернет-ресурс Online Chemical Modeling Environment - OCHEM (<https://ochem.eu>), с использованием которого можно подобрать подходящий тип дескрипторов и сравнить различные методы построения QSPR - зависимости.

В настоящей работе в качестве метода описания структуры соединения выбран метод аддитивно-групповых вкладов. Хотя данный метод уступает в дискриминирующей способности методам, основанным на использовании топологических индексов, его преимуществом является то, что инкременты атомных групп, вычисляемые данным методом, позволяют судить об относительном вкладе каждой группы в рассматриваемое свойство. Особенно это интересно для такого физического свойства как энтальпия испарения химического соединения ( $\Delta H_{и}$ ) [8], поскольку позволяет объяснить особенности межмолекулярных взаимодействий в ассоциированных органических соединениях [9–13] и полимерах с физической сеткой [14]. На основании энтальпии испарения можно рассчитать плотность энергии когезии и параметр растворимости [1], с помощью которого можно оценить уровень растворимости соединения в растворителях различных классов.

Целью настоящей работы явился расчет методом аддитивно-групповых вкладов энтальпии испарения 7-метил-6-гексадеценовой кислоты и ее метилового эфира, относящихся к числу биологически активных соединений. Несмотря на большое разнообразие встречающихся в живой природе жирных кислот и их эфиров, для многих из них отсутствуют данные по термодинамическим свойствам, в частности по энтальпии испарения, что затрудняет исследования механизма их участия в физико-химических процессах в организме. В том числе отсутствуют эти данные и для исследуемой кислоты и ее эфира.

### Результаты расчетов

В рамках метода аддитивно-групповых вкладов рассматривается схема химического соединения по атомам с учетом их ближайшего окружения, которая предполагает, что искомое значение характеристики подсчитывается как сумма вкладов отдельных структурных единиц соедине-

ния. В основе расчета физико-химических характеристик органических соединений лежит многопараметрическое аддитивное уравнение, в которое, в зависимости от структуры вещества, могут входить десятки параметров групповых вкладов (инкрементов):

$$Y = m_1X_1 + m_2X_2 + \dots + m_nX_n, \quad (1)$$

где  $m_i$  – число фрагментов  $i$ -го вида в молекуле;  $X_i$  – инкремент, описывающий групповой вклад  $i$ -го фрагмента.

Выражение (1) представляет собой уравнение линейной регрессии [15], в котором инкременты  $X_i$  являются коэффициентами регрессии и находятся методом наименьших квадратов.

Создание QSPR модели начинали с подготовки обучающих (20 соединений) и тестовых (77 соединений) выборок на основе соединений, содержащих структуры заданной кислоты и эфира, с известными значениями энтальпий испарения, взятых из литературных источников [16-18], и выбору подходящих дескрипторов (табл. 1).

**Таблица 1. Фрагмент обучающей выборки для заданной кислоты**

Наименование соединения	Количество групп					$\Delta H_{ис}$ , кДж/моль
	-C	-CH	-CH <sub>2</sub>	-CH <sub>3</sub>	-COOH	
Этан	0	0	0	2	0	5.16
Пропан	0	0	1	2	0	14.79
2,2-Диметилгексан	1	0	3	4	0	37.28
2,2,5-Триметилгексан	1	1	2	5	0	40.16
2-Метилдекан	0	1	7	3	0	54.28
Пропен	0	1	1	1	0	14.24
1-Бутен	0	1	2	1	0	20.22
2-Метил-2-бутен	1	1	0	2	0	27.06
Пропановая к-та	0	0	1	1	1	55
Бутановая к-та	0	0	2	1	1	58

Далее производится расчет инкрементов методом наименьших квадратов (табл. 2). Вычисленные значения инкрементов в энтальпию испарения характеризуют вклад соответствующей атомной группы в уровень межмолекулярного взаимодействия. Так, согласно полученным данным, наибольшим вкладом в энергию межмолекулярных взаимодействий характеризуются карбоксильные группы -COOH, что объясняется способностью двух карбоксильных групп участвовать в образовании двух водородных

связей [19]. Второй по величине вклада в энергию межмолекулярных взаимодействий являются сложноэфирные группы  $-\text{COO}-$ , относящиеся к числу полярных атомных групп, способных к межмолекулярным взаимодействиям ориентационного и поляризованного типов. Инкременты в энтальпию испарения углеводородных групп ( $-\text{CH}_x$ ), характеризующихся только дисперсионными межмолекулярными взаимодействиями, существенно меньше. Следует отметить, что инкременты групп  $-\text{CH}_3$  оказались наименьшими, хотя, на первый взгляд, их значения должны быть больше, поскольку количество атомов, способных к дисперсионным взаимодействиям для них самое высокое из углеводородных групп. По-видимому, эта аномалия объясняется тем, что метильные группы являются конечными, а при локальных движениях кинетическая энергия локальных движений не однородно распределяется по углеводородной цепи таким образом, что концевые группы являются более подвижными [20, 21] и их межмолекулярные взаимодействия оказываются ослабленными.

**Таблица 2. Расчет инкрементов атомных групп**

Расчет инкрементов					
Кислота	$-\text{COOH}$	$-\text{CH}_3$	$-\text{CH}_2$	$-\text{CH}$	$-\text{C}$
	44.1304	3.9244	5.1869	5.8956	7.4771
Эфир	$-\text{COO}-$	$-\text{CH}_3$	$-\text{CH}_2$	$-\text{CH}$	$-\text{C}$
	19.5471	3.9636	5.1450	6.6372	6.4815

Подставляя в уравнение (1) количество атомных групп и рассчитанные значения их инкрементов можно рассчитать энтальпию испарения неизвестных соединений, в частности рассматриваемой кислоты и ее эфира (табл. 3).

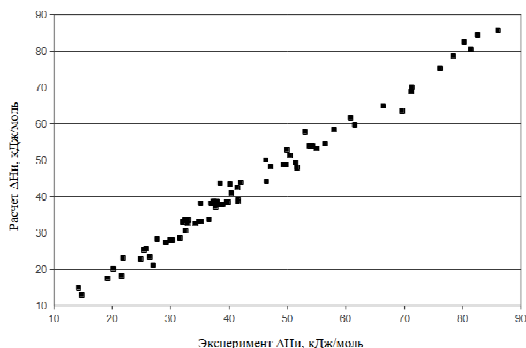
**Таблица 3. Расчет энтальпии испарения заданной кислоты и эфира**

Исследуемое соединение	$-\text{C}$	$-\text{CH}$	$-\text{CH}_2$	$-\text{CH}_3$	$-\text{COOH}$	$\Delta H_{\text{ис}}$ , кДж/моль
	7-Метил-6-гексадеценвая кислота	1	1	12	2	
Метильный эфир 7-метил-6-гексадеценвой кислоты	$-\text{C}$	$-\text{CH}$	$-\text{CH}_2$	$-\text{CH}_3$	$-\text{COO}-$	$\Delta H_{\text{ис}}$ , кДж/моль
	1	1	12	3	1	

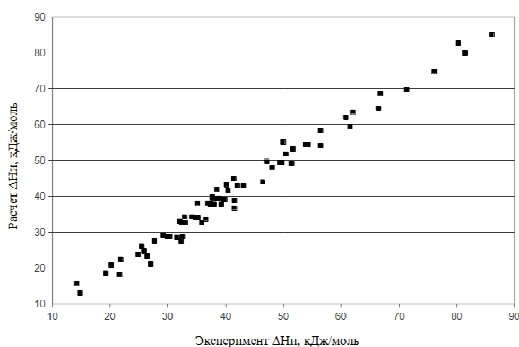
Таким же образом рассчитывается энтальпия испарения для соединений из проверочной выборки, фрагменты которой представлены в таблице 4. Как видно из табл. 4, наблюдается достаточно хорошее соответствие между экспериментальными и расчетными значениями, что подтверждается также корреляционными диаграммами, показанными на рис. 1. Адекватность линейной регрессионной модели подтверждается результатом статистического анализа, представленным в табл. 5.

Таблица 4. Фрагмент проверочной выборки для заданной кислоты

Класс	Название	Кол. ат. С	Количество групп					$\Delta H_{ис}$ , кДж/моль	
			-С	-СН	-СН <sub>2</sub>	-СН <sub>3</sub>	-СООН	Экспер.	Расчет
Алканы	Ундекан	11	0	0	9	2	0	56.43	54.53
Алканы	Додекан	12	0	0	10	2	0	61.51	59.72
Алканы	Тридекан	13	0	0	11	2	0	66.43	64.90
Алканы	Тетрадекан	14	0	0	12	2	0	71.3	70.09
Алканы	Пентадекан	15	0	0	13	2	0	76.11	75.28
Алканы	Гексадекан	16	0	0	14	2	0	81.38	80.46
Алканы	Гептадекан	17	0	0	15	2	0	86.02	85.65
Алканы	2-Метилпропан	4	0	1	0	3	0	19.23	17.67



*a*



*б*

Рис. 1. Корреляционные диаграммы модели Calc на основе экспериментальных и расчетных значений энтальпии испарения:  
*a* – заданной кислоты и *б* – ее эфира

Таблица 5. Результаты статистического анализа линейной модели

Статистический анализ	$\Delta H_{\text{н}}$ , кислота	$\Delta H_{\text{н}}$ , эфир
Дисперсия адекватности	4.590	4.002
Коэффициент корреляции с экспериментом	0.993	0.991
Доверительный интервал	4.270	3.981
Относительная ошибка	4.95%	4.81%

**Заключение.** В настоящей работе предложен алгоритм моделирования термодинамических свойств жирных кислот и их производных на основе метода аддитивно-групповых вкладов с использованием линейного регрессионного анализа. В качестве примера приведен расчет по разработанным моделям энтальпии испарения 7-метил-6-гексадеценовой кислоты и метилового эфира 7-метил-6-гексадеценовой кислоты. В результате проведения вычислительных экспериментов установлена адекватность разработанной модели.

Вычисленные значения инкрементов позволяют рассчитывать энтальпию испарения для различных представителей жирных кислот и их производных, а разработанный алгоритм позволяет создавать модели для расчета различных физико-химических характеристик для других классов веществ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван Кревелен Д.В. Свойства и химическое строение полимеров: пер. с англ. / под ред. А. Я. Малкина. М.: Химия, 1976. 416 с.
2. Аскадский А.А. Компьютерное материаловедение полимеров. Том 1. Атомно-молекулярный уровень / А.А. Аскадский, В.И. Кондрашенко. М.: Науч. мир, 1999. 544 с.
3. Нестеров И.А. Прогнозирование свойств органических веществ / И.А. Нестеров, В.С. Саркисова. Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2005. 240 с.
4. Соловьев М.Е. Компьютерная химия / М.Е. Соловьев, М.М. Соловьев М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2005. 536 с.
5. Соловьев М.Е. Компьютерное моделирование в химии: учебное пособие / М.Е. Соловьев, К.Е. Дмитриев. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2021. 256 с.
6. Gasteiger J. Chemoinformatics / J. Gasteiger, Engel T. N.Y.: Wiley-VCH, 2003. 671 p.
7. Баскин И.И. Введение в хемоинформатику: 3. Моделирование "структура - свойство": учебное пособие / И.И. Баскин, Т.И. Маджидов, А.А. Варнек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. 304 с.
8. Инкременты энтальпий испарения органических соединений / Г.В. Королев, А.А. Ильин, Е.А. Сизов, М.Е. Соловьев, М.М. Могилевич // Журнал общей химии. 2000. Т. 70, № 7. С. 1088–1091.

9. Особенности межмолекулярных взаимодействий в органических соединениях с аномально низкими температурами кипения / Г.В. Королев, А.А. Ильин, М.М. Могилевич, Р.В. Чебунин, М.Е. Соловьев // Журнал общей химии. 2003. Т. 73, № 3. С. 360–366.
10. Компьютерное моделирование ассоциативных структур эфиров акрилового ряда / Г.В. Королев, А.А. Ильин, М.Е. Соловьев М.М. Могилевич, Е.С. Евплонина // Высокомолекуляр. соединения. Серия А. 2001. Т. 43, № 10. С. 1822–1827.
11. Компьютерное моделирование строения и температурной стабильности ассоциатов высших алкил(мет)акрилатов / Г.В. Королев, А.А. Ильин, М.Е. Соловьев, А.В. Срыбный, М.М. Могилевич, Е.С. Евплонина // Высокомолекулярные соединения. Серия А. 2002. Т. 44, № 11. С. 1947–1954.
12. Компьютерное моделирование строения и температурной стабильности полимер-мономерных ассоциатов некоторых высших *n*-алкил(мет)акрилатов / Г.В. Королев, А.А. Ильин, М.Е. Соловьев, М.М. Могилевич, А.В. Срыбный, Е.С. Евплонина // Высокомолекуляр. соединения. Серия Б. 2005. Т. 47, № 1. С. 94–98.
13. Моделирование ассоциативных структур фторалкилметакрилатов / А.А. Ильин, М.Е. Соловьев, М.М. Могилевич, И.Н. Семейкин, Г.В. Королев // Высокомолекулярные соединения. Серия Б. 2002. Т. 44, № 4. С. 693–696.
14. *Иржак В.И.* Межмолекулярное взаимодействие в полимерах и модель физической сетки / В.И. Иржак, Г.В. Королев, М.Е. Соловьев // Успехи химии. 1993. Т. 66, № 2. С. 179–200.
15. *Соловьев М.Е.* Экспериментально-статистические методы в химико-технологических исследованиях с использованием программных средств Open Source: учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. 263 с.
16. Handbook of physical-chemical properties and environmental fate for organic chemicals. / Mackay D., Shiu W.Y., Ma K-Ch., Lee S.Ch. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006 Vol. I–IV.
17. *Lide D.R.* CRC Handbook of Chemistry and Physics, 85th Edition. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group. 2004.
18. *Chickos J.S.* Enthalpies of Vaporization of Organic and Organometallic Compounds, 1880–2002 / J. S. Chickos J.S., W.E. Acree // J. Phys. Chem. Ref. Data. 2003. Vol. 32, No. 2. P. 519–878.
19. *Соловьев М.Е.* Моделирование локальной динамики межмолекулярных взаимодействий в бутадиен-нитрильных сополимерах с карбоксильными и гидроксильными группами / М.Е. Соловьев, А.Б. Раухваргер, В.И. Иржак // Высокомолекулярные соединения. Серия А, 2021. Т. 63, № 4, с. 283–292
20. *Соловьев М.М.* Молекулярно-динамическое моделирование конформаций низкомолекулярных цис-и транс-полибутадиеновых цепей / М.М. Соловьев, М.Е. Соловьев // Журнал физической химии. 2002. Т. 76, № 11. С. 2009.
21. Компьютерное моделирование динамики сшитых эпоксицирированных олигобутадиенов различной микроструктуры / М.М. Соловьев, Б.С. Туров, М.Е. Соловьев, Т.Е. Абрамова, Н.С. Минеева // Высокомолекулярные соединения. Серия Б. 2007. Т. 49, № 5. С. 926–931.

УДК 51-7:66.048

**Д. С. Максимов, А. И. Балунов**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@yustu.ru

## **ВЫБОР ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРЯДКА ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ ГАЗОВ В СИСТЕМЕ КОЛОНН РЕКТИФИКАЦИИ**

*Рассмотрены особенности выбора оптимальной структуры ректификационной системы по критериям оценки качества разделения и суммарных затрат теплоты на разделение. Обоснована термодинамическая интерпретация принятых критериев оптимальности. Приведен пример выбора порядка фракционирования углеводородных газов, в котором оптимизация по этим критериям приводит к одной и той же структуре системы.*

**Ключевые слова:** ректификация, оптимальный порядок разделения, структура системы, энтропия выбора, принцип дихотомии, оптимизационная термодинамика, затраты теплоты, температурный коэффициент

**D. S. Maksimov, A. I. Balunov**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@yustu.ru

## **CHOICE OF A THERMODYNAMICALY OPTIMAL SEQUENCE OF GAS FRACTIONATION IN A RECTIFICATION SYSTEM**

*The features of the choice of the optimal structure of the distillation system according to the criteria for assessing the quality of separation and the total cost of heat for separation are considered. The thermodynamic interpretation of the accepted optimality criteria is substantiated. An example of the choice of the sequence of fractionation of hydrocarbon gases is given, in which optimization by these criteria leads to the same structure of the system.*

**Keywords:** rectification, optimal separation order, system structure, entropy of choice, dichotomy principle, optimization thermodynamics, heat costs, temperature coefficient

**Введение.** При проектировании ректификационных систем, разделяющих многокомпонентные смеси на составляющие вещества или фракции, одной из основных задач является выбор порядка разделения смеси



(структуры системы). Решению этой задачи посвящено большое количество исследований [1–13]. При этом часто предложенные методы базируются либо на эвристических правилах типа (см. [1, с. 289]): «В первую очередь надо отделять самый легколетучий компонент» или «В первую очередь надо отделять компонент с наибольшей концентрацией», либо на вычислительных алгоритмах, требующих перебора значительного количества вариантов разделения. Трудоемкость последних особенно возрастает при решении задачи совместно с выбором конструкции и режима работы колонн по общему технико-экономическому критерию, учитывающему стоимость всего технологического оборудования системы.

Нам представляется более продуктивным использование для выбора оптимального порядка разделения смеси методов, основанных на термодинамическом подходе. В настоящей работе два таких метода применены для выбора оптимальной структуры ректификационной системы газодиффузионной, разделяющей многокомпонентную углеводородную смесь.

### **1. Энтропийно-информационный метод**

При оптимизации процессов разделения на основе энтропийно-информационного метода целевой функцией является информационный критерий качества разделения, который введен на основе кибернетического закона необходимого разнообразия, как критерий, оценивающий степень организованности системы [14]:

$$\eta = (H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}}) / H_{\text{вх}}, \quad (1)$$

где  $H_{\text{вх}}$ ,  $H_{\text{вых}}$  – информационные энтропии, оценивающие неупорядоченность потоков на входе и выходе системы.

Критерий  $\eta$  изменяется от нуля (отсутствие разделения) до единицы (полное разделение). С его помощью может оцениваться разделительная способность как отдельной колонны, так и системы колонн в целом.

Критерий (1) можно трактовать и как термодинамический, поскольку числитель пропорционален минимальной работе разделения исходной, близкой к идеальной, смеси на заданные продукты, а знаменатель пропорционален аналогичной работе на чистые продукты.

Известно, что такой критерий не противоречит критериям, построенным на технико-экономической оценке [15].

Анализ результатов численного эксперимента показал, что при достаточно четком разделении смеси в колонне зависимость критерия (1) от отбора продукта имеет несколько локальных экстремумов (максимумов), число которых в общем случае равно числу возможных вариантов (границ) деления смеси. При этом относительные отборы, соответствующие экс-

тремумам критерия (1), удовлетворяют простому условию, например, для отбора дистиллята [7, 8]

$$\varepsilon_y \approx \sum_{i=1}^k x_{Fi} , \quad (2)$$

где  $\varepsilon_y$  – отбор дистиллята, приведенный к 1 молью разделяемой смеси (относительный отбор);  $x_{Fi}$  – мольная концентрация  $i$ -го компонента в разделяемой смеси;  $k$  – номер наиболее тяжелого компонента из обогащаемых в дистиллят.

Это соотношение иногда называют условием оптимальной статики или условием максимального потенциального отбора продукта, которое выполняется тем строже, чем выше степень разделения в колонне. При допущении о полном разделении, когда в ректификационной колонне нет ни одного компонента, распределяющегося одновременно между дистиллятом и кубовым продуктом, условие (2) становится единственно возможным при заданной границе деления смеси. В этом случае критерий (1) с точностью до постоянного множителя  $1/H_{\text{вх}}$  совпадает с информационной энтропией для двух исходов опыта (энтропией выбора):

$$\eta = H_{\text{в}} / H_{\text{вх}} , \quad (3)$$

где  $H_{\text{в}} = -\varepsilon_y \log \varepsilon_y - (1 - \varepsilon_y) \log(1 - \varepsilon_y)$  – энтропия выбора.

Поскольку энтропия выбора максимальна в случае равновероятных событий, то при отсутствии каких-либо специальных ограничений с точки зрения информационного критерия (1) оптимально в колонне делить смесь «пополам» (принцип дихотомии):  $\varepsilon_y^{\text{опт}} = 0.5$  [7, 8]. Однако для многокомпонентных смесей не всегда возможно выбрать границу, одновременно удовлетворяющую полному и «половинному» делению, поэтому применять принцип дихотомии необходимо с учетом дискретности смеси, максимально приближаясь к дихотомному разделению. При этом, как правило, будет наблюдаться отклонение от теоретически оптимальной границы разделения  $\varepsilon_y = 0.5$ .

Последовательно применяя принцип дихотомии на каждом шаге разделения (каждой ректификационной колонне), можно получить оптимальный порядок разделения смеси без перебора возможных вариантов разделения. Однако не всегда оптимальное разделение на каждой отдельной колонне обеспечивает оптимальность разделения смеси в системе колонн в целом. Поэтому применительно к многоколонной ректификационной системе, учитывая аддитивные свойства энтропии, в качестве критерия оптимальности порядка разделения можно использовать сумму энтропий выбора отдельных ректификационных колонн [7]. В этом случае тре-

буется перебор всех возможных вариантов разделения, однако расчет каждого варианта элементарен, так как в нем участвуют только относительные отборы продуктов (см. (3)). Максимально возможное значение такого критерия соответствует теоретически оптимальной границе разделения смеси в каждой колонне системы

$$H_{\Sigma}^{\max} = -n(0.5 \log 0.5 + 0.5 \log 0.5) = n \log 2,$$

где  $H_{\Sigma}$  – суммарная энтропия выбора;  $n$  – число колонн в системе.

В работе [3] на основе проведенного численного исследования показано, что системе с максимальной суммарной энтропией выбора соответствует наименьшая суммарная протяженность процесса (наименьшее суммарное число теоретических ступеней контакта) и наоборот.

Рассмотрим особенности применения суммарной энтропии выбора и принципа дихотомии при определении оптимального порядка разделения многокомпонентной смеси (табл. 1) на пять фракций: первая фракция включает компоненты 1–5, вторая – компонент 6, третья – компонент 7, четвертая – компонент 8 и пятая – компоненты 9 и 10.

**Таблица 1. Состав разделяемой смеси и коэффициенты уравнения Антуана**

$i$	Компонент	$x_F$	$A$	$B$	$C$
1	Сероводород	0.0060	16.1040	1768.69	-26.06
2	Углекислый газ	0.0020	22.5898	3103.39	-0.16
3	Метан	0.0190	15.2243	897.84	-7.16
4	Этан	0.0190	15.6637	1511.42	-17.16
5	Пропан	0.3940	15.7260	1872.46	-25.16
6	Изобутан	0.1300	15.5381	2032.73	-33.15
7	Бутан	0.1170	15.6782	2154.90	-34.42
8	Изопентан	0.1230	15.6338	2348.67	-40.05
9	Пентан	0.0880	15.9333	2477.07	-39.94
10	Гексан	0.1020	15.8366	2697.55	-48.78

Известно, что для разделения многокомпонентной смеси на составляющие компоненты требуется ректификационная система, содержащая число колонн на единицу меньше числа разделяемых компонентов, при этом структура системы может быть различной. Общее число вариантов структур  $N$  определяется формулой [2, 4]:

$$N = [2(m-1)!]/[m!(m-1)!],$$

где  $m$  – число компонентов в разделяемой смеси.

В рассматриваемом случае:  $m = 5$ ,  $n = 4$ , а  $N = 14$ .

Концентрации выделяемых фракций в исходной смеси равны:  $z_1 = x_{F_1} + x_{F_2} + x_{F_3} + x_{F_4} + x_{F_5} = 0.440$ ,  $z_2 = x_{F_6} = 0.130$ ,  $z_3 = x_{F_7} = 0.117$ ,  $z_4 = x_{F_8} = 0.123$ ,  $z_5 = x_{F_9} + x_{F_{10}} = 0.190$ .

Располагая концентрациями фракций и рассчитав суммарную энтропию выбора для каждого из 14 вариантов, выбираем в качестве оптимального порядок разделения с наибольшим значением этого критерия (рис. 1). Для него  $H_{\Sigma} = 3.944$ . При этом энтропия выбора на первом шаге разделения (для первой колонны) составляет

$$H_{в1} = -z_1 \log_2 z_1 - (1 - z_1) \log_2 (1 - z_1) = 0.990.$$

Энтропия выбора для второй колонны

$$H_{в2} = -\frac{z_2 + z_3}{1 - z_1} \log_2 \frac{z_2 + z_3}{1 - z_1} - \frac{z_4 + z_5}{1 - z_1} \log_2 \frac{z_4 + z_5}{1 - z_1} = 0.990.$$

Аналогично, энтропии выбора для колонн 3 и 4 равны  $H_{в3} = 0.997$  и  $H_{в4} = 0.967$ .

Максимально возможное значение энтропии выбора для четырехколонной системы  $H_{\Sigma}^{\max} = 4 \log_2 2 = 4.0$ .

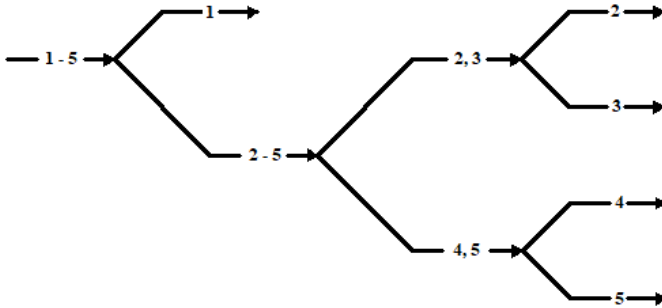


Рис. 1. Оптимальный порядок разделения смеси

В некоторых случаях оптимальный порядок разделения можно получить в результате прямого синтеза, используя дихотомный принцип последовательно для каждой колонны. Для этого требуется лишь исходный молярный состав разделяемой смеси. Так, ту же смесь по принципу дихотомии первоначально следует делить на фракции с индексами 1 (дистиллят) и 2–5 (кубовый продукт), поскольку это ближе всего к половинному

делению  $z_1 = 0.44$ , а  $z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0.56$ . Оставшуюся смесь по тому же принципу следует разделить на фракции с индексами 2, 3 (дистиллят) и 4, 5 (кубовый продукт), поскольку  $z_2 + z_3 = 0.247$ , а  $z_4 + z_5 = 0.313$ . Заметим, что полученный по дихотомному принципу оптимальный порядок разделения совпадает с выбранным ранее по критерию суммарной энтропии выбора (см. рис. 1). Однако так бывает не всегда, потому что энтропия выбора как критерий оптимальности учитывает приближение к принципу дихотомии в целом для системы, но не всегда для отдельного шага разделения.

### 3. Метод оптимизационной термодинамики

В работах [9–13] на основе методов оптимизационной термодинамики (необратимой термодинамики, термодинамики конечного времени) с привлечением уравнений термодинамических балансов (энергетического, материального и энтропийного) получено следующее условие оптимальности задачи о выборе порядка разделения смеси в термических системах: *«Чтобы обратимые затраты энергии на разделение многокомпонентной смеси были минимальны, температурные коэффициенты должны монотонно возрастать от первой к последующим ступеням разделения»*.

Это условие иногда называют правилом неубывания температурных коэффициентов [11]. Оно утверждает, что в первую очередь нужно разделять смесь по границе, которой соответствует минимальный температурный коэффициент.

В работах [9–13] также показано, что необратимые затраты энергии на разделение смеси ректификацией пропорциональны обратимым затратам. Поэтому оптимальный порядок разделения, полученный по правилу неубывания температурных коэффициентов, будет отвечать и минимуму суммарных затрат энергии на разделение.

Для систем ректификации правило неубывания температурных коэффициентов можно записать в форме

$$K_{T_j} < K_{T_{j+1}} \Rightarrow \frac{T_{Bj} T_{Dj}}{T_{Bj} - T_{Dj}} < \frac{T_{Bj+1} T_{Dj+1}}{T_{Bj+1} - T_{Dj+1}}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

где  $K_{T_j}$  – температурный коэффициент  $j$ -той колонны,  $T_{Dj}$  и  $T_{Bj}$  – температуры в дефлегматоре и кубе  $j$ -той колонны.

Для ректификации со смещением границы разделения в сторону высококипящих компонентов температурный коэффициент, как правило, возрастает (числитель растёт пропорционально квадрату, а знаменатель – первой степени температуры). Поэтому в большинстве случаев, но не всегда, справедливо эвристическое правило о том, что надо последовательно отделять низкокипящие компоненты [4].

В самом грубом приближении учесть влияние потерь от необратимости процессов в термических системах можно, исходя из того, что они пропорциональны квадрату потока разделяемой смеси [16]. Сумма квадратов выходных потоков для каждой колонны при заданном суммарном потоке на ее входе минимальна, когда эти потоки близки друг к другу. Поэтому наилучшая с точки зрения необратимых затрат граница разделения должна быть такова, чтобы выходные потоки в каждой колонне были приблизительно одинаковы. Это соответствует правилу дихотомии, предложенному в [7].

С учетом этого обстоятельства сформулированное выше правило выбора порядка разделения можно дополнить так: «Если температурные коэффициенты для двух границ разделения совпадают или мало отличаются друг от друга, предпочтительнее та, для которой доли отборов ближе друг к другу».

Для того чтобы рассчитать величину температурного коэффициента, необходимо располагать значениями температур кипения смеси в кубе и конденсации в дефлегматоре, которые зависят как от состава смеси, так и от давления в колонне. Приведем один из возможных алгоритмов расчета этих температур.

Во многих случаях давление в колонне  $P_C$  выбирают таким, чтобы для конденсации пара в дефлегматоре можно было использовать воду или другой хладагент при температуре окружающей среды. Тогда температура в дефлегматоре будет близка к температуре окружающей среды, а давление в колонне для смесей различного состава будет меняться.

В дефлегматоре дистиллят, отбираемый в виде пара известного состава  $x_D$ , находится в состоянии термодинамического равновесия с жидкостью, образующейся в результате конденсации. Поэтому давление в дефлегматоре, а значит, и в колонне в целом, может быть найдено из условия фазового равновесия по формуле [17]:

$$P_c(T) = \frac{1}{\sum_i x_{Di}/P_i(T)}. \quad (5)$$

Здесь  $P_i(T)$  – давление насыщенного пара  $i$ -го компонента при температуре  $T = T_D$ . Для смесей, близких к идеальным растворам, давление насыщенного пара компонентов можно рассчитать, воспользовавшись уравнением Антуана [18]:

$$P_i(T) = \exp\left(A_i - \frac{B_i}{T + C_i}\right).$$

Здесь  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$  – табулированные эмпирические коэффициенты, относящиеся к  $i$ -му компоненту, значения которых для большинства веществ приведены в справочной литературе, например, [19]. В случае неидеальных смесей необходимо использовать более сложные зависимости давления насыщенного пара компонентов от температуры, учитывающие состав смеси [20].

После того как давление в колонне найдено ( $P_C(T_D) = P_C(T_B)$ ), температуру  $T_B$  можно найти из уравнения фазового равновесия, записанного для куба колонны [17], где в состоянии термодинамического равновесия находится кубовый продукт известного состава  $x_B$  :

$$P_C(T) = \sum_i x_{Bi} P_i(T). \quad (6)$$

Здесь  $P_i(T)$  имеет тот же смысл, что и в условии (5), а  $T = T_B$ . Уравнение (6) в большинстве случаев может быть разрешено относительно  $T_B$  только численно, но в силу того, что его правая часть монотонно возрастает с увеличением  $T_B$ , оно имеет единственный действительный корень.

В случае, когда давление в колонне по тем или иным причинам фиксировано, для расчета температуры конденсации в дефлегматоре может быть использовано равенство (5), в котором  $T_D$  рассматривается как неизвестная, а  $P_C$  задано.

Располагая значениями температур  $T_D$  и  $T_B$ , температурный коэффициент колонны рассчитывают по формуле  $K_T = T_B T_D / (T_B - T_D)$  (см. (4)).

Используя правило неубывания температурных коэффициентов, определим оптимальный порядок разделения той же смеси, порядок разделения которой выше был определен по критерию суммарной энтропии выбора и принципу дихотомии.

Примем температуру в дефлегматорах колонн равной  $T_D = 323$  К и рассчитаем по формуле (5) давление в колонне 1 для различных границ разделения смеси. Для удобства расчета будем предполагать, что справедлива концепция полного разделения, согласно которой в дистиллят попадают только компоненты легкой группы, а в кубовый продукт только компоненты тяжелой группы. Полученные значения  $P_{C1}$  приведены в табл. 2.

Найдем температуру в кубе колонны 1 в результате решения уравнения (6) и рассчитаем температурные коэффициенты для различных границ разделения смеси. Полученные значения  $T_{B1}$  и  $K_{T1}$  также приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчета

Граница разделения смеси	Колонна 1			Колонна 2		
	$P_{C1}$ , МПа	$T_{B1}$ , К	$K_{T1}$	$P_{C2}$ , МПа	$T_{B2}$ , К	$K_{T2}$
(1–5) : (6–10)	1.829	404.4	1606.3	-	-	-
(1–6) : (7–10)	1.313	399.2	1693.1	0.672	364.9	2815.8
(1–7) : (8–10)	1.022	404.1	1610.1	0.572	375.4	2314.4
(1–8) : (9, 10)	0.635	390.2	1877.4	0.358	364.9	2813.0

Анализируя полученные температурные коэффициенты в соответствии с правилом их неубывания, на первой колонне выбираем оптимальную границу разделения, при которой из исходной смеси выделяется первая фракция. Оставшаяся смесь разделяется во второй колонне, для которой аналогично находим  $P_{C2}$ ,  $T_{B2}$  и  $K_{T2}$  для различных границ разделения. Полученные значения этих параметров приведены в табл. 2. Во второй колонне в соответствии с тем же правилом оптимально отделять фракции 2 и 3 от фракций 4 и 5. В двух последних колоннах системы будут разделяться фракции 2 и 3 и фракции 4 и 5. Для этих колонн температурные коэффициенты соответственно равны  $K_{T3} = 8556.9$  и  $K_{T4} = 5409.8$ .

Очевидно, что определенный на основе правила неубывания температурных коэффициентов оптимальный порядок разделения смеси полностью совпадает с найденным выше оптимальным порядком разделения на основе информационного критерия оценки качества разделения (см. рис. 1). При этом полученная структура ректификационной системы совпадает со структурой газодиффузионной установки, разделяющей смесь близкого состава, на одном из нефтеперерабатывающих заводов.

**Закключение.** На примере выбора оптимальной последовательности фракционирования углеводородных газов рассмотрены особенности применения двух термодинамических критериев оптимальности: оценки качества разделения и суммарных затрат теплоты на разделение. Показано, что при определенных условиях оптимизация по этим критериям приводит к одной и той же структуре системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кафаров В.В. Математические основы автоматизированного проектирования химических производств / В.В. Кафаров, В.П. Мешалкин, В.Л. Перов. М.: Химия, 1979. 320 с.
2. Синтез оптимальных схем ректификации многокомпонентных смесей методом динамического программирования / В.В. Кафаров, Ф.Б. Петлюк, С.А. Гройсман, Ю.К. Телков, М.В. Белов // Теор. основы хим. технологии. 1975. Т. 9, № 2. С. 262–269.



3. *Майков В.П.* Выбор термодинамически оптимальных схем разделения при ректификации / В.П. Майков, И.С. Лагутина // Химия и технология топлив и масел 1981. № 3. С. 40–44.
4. *Львов С.В.* Некоторые вопросы ректификации бинарных и многокомпонентных смесей. М.: Академия наук СССР, 1960. 168 с.
5. *Островский Г.М.* Оптимальный синтез системы простых ректификационных колонн / Г.М. Островский, Н.Н. Зиятдинов, Ф.У. Мустафина, Д.А. Рыжов // Теор. основы хим. технологии. 2013. Т. 47, № 6. С. 646–655.
6. *Серафимов Л.А.* Выбор оптимальных технологических схем ректификации многокомпонентных смесей / Л.А. Серафимов, Т.В. Челюскина, П.О. Мавлеткулова // Теорет. основы хим. технологии. 2015. Т. 49, № 1. С. 44–53.
7. *Балунов А.И.* Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2003. Т. 46, № 9. С. 54–67.
8. *Балунов А.И.* Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтропийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2013. Т. 56, № 4. С. 97–106.
9. *Балунов А.И.* Оценка предельных возможностей процесса ректификации непрерывных смесей с учетом необратимости тепломассопереноса / А.И. Балунов, А.М. Цирлин // Инженерно-физический журнал. 2020. Т. 93, № 2. С. 274–282.
10. *Цирлин А.М.* Математическая модель процесса ректификации и выбор порядка разделения многокомпонентных смесей // А.М. Цирлин, И.А. Сукин, А.И. Балунов // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 47–61.
11. *Цирлин А.М.* Оценка затрат энергии и выбор оптимальной последовательности разделения многокомпонентных смесей / Цирлин А.М., Балунов А.И., Сукин И.А. // Теорет. основы хим. технологии. 2016. Т. 50, №3. С. 258–267.
12. *Сукин И.А.* Методы необратимой термодинамики в задачах синтеза систем теплообмена и разделения / И.А. Сукин, А.И. Балунов, А.М. Цирлин. М.: РАН, 2021. 358 с.
13. *Balunov A.I.* Entropic balance conditions and optimization of distillation column system / A. Balunov, I. Sukin, A. Tsirlin // Entropy. 2021. Т. 23, N 11. P. 1468.
14. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. URSS, 2017. 430 с.
15. *Чайченец Н.С.* Исследование связи термодинамических и технико-экономических критериев оптимальности в ректификационных системах, разделяющих идеальные смеси / Н.С. Чайченец, В.П. Майков, И.П. Усюкин // Теорет. основы хим. технологии. 1977. Т. 11, № 4. С. 598–605.
16. *Tsirlin A.M.* Finite-time thermodynamics: The maximal productivity of binary distillation and selection of optimal separation sequence for an ideal ternary mixture / A.M. Tsirlin, I.A. Sukin // Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics. 2014. V. 39, N 1. P. 13–25.
17. *Александров И.А.* Ректификационные и абсорбционные аппараты. М.: Химия, 1978. 296 с.
18. *Багатуров С.А.* Основы теории перегонки и ректификации. М.: Химия, 1974. 440 с.
19. *Рид Р.* Свойства газов и жидкостей. Справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд. Л.: Химия, 1982. 592 с.
20. *Kister H.Z.* Distillation Design. New York: McGraw-Hill, 1992. 710 p.

УДК 51-7:624.04:624.1

**С. А. Тумаков, Г. Н. Голубь, Г. Ю. Теренина**

Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, e-mail: tumakovsa@ystu.ru, gridove@mail.ru,  
tereninagyu@mail.ru

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ФУНДАМЕНТНЫХ БАЛОК**

*Рассматривается математическая модель трансверсально-изотропного упругого полупространства, описывающая поведение анизотропных грунтовых оснований под нагрузкой. Приведено решение статической задачи балки, расположенной на трансверсально-изотропном основании, выполненное методом Жемочкина-Синицына.*

**Ключевые слова:** математическая модель, грунтовое основание, анизотропия, напряженно-деформированное состояние, балка, фундамент

**S. A. Tumakov, G. N. Golub', G. J. Terenina**

Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, e-mail: tumakovsa@ystu.ru, gridove@mail.ru,  
tereninagyu@mail.ru

## **MATHEMATICAL MODEL OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC SOIL BASE FOR CALCULATION OF FOUNDATION BEAMS**

*The paper examines a mathematical model of a transversally isotropic elastic half-space describing the behavior of anisotropic soil bases under load. The solution of the static problem of a beam located on a transversally isotropic base, performed by the Zhemochkin-Sinityn method, is given.*

**Keywords:** mathematical model, ground foundation, anisotropy, stress-strain state, beam, foundation

Важной задачей при проектировании зданий является учет деформационных и прочностных свойств грунтовых оснований, наиболее точно отражающих реальное поведение грунтов под нагрузкой. При построении математической модели поведения грунта под нагрузкой модель должна описывать поведение грунтового основания при наиболее неблагоприятных условиях эксплуатации [1]. Для обеспечения надежности и безаварий-

ной эксплуатации здания в расчетах следует учитывать особые свойства грунтов, влияющие на напряженно-деформированное состояние фундаментных конструкций и конструктивных элементов сооружения. Современный подход в расчете зданий и сооружений базируется на необходимости проведения совместного расчета здания и грунтового основания, на котором оно базируется. Это требование отражено в строительных нормах проектирования [2]. Строительные конструкции и их фундаменты должны рассчитываться в единстве, с учетом их взаимодействия друг с другом. При этом конструктивную расчетную схему системы "сооружение–основание" следует выбирать с учетом наиболее значимых факторов самого здания и грунтового основания. Традиционно считалось, что упругая реакция грунтов изотропна. Однако практические и лабораторные исследования грунтовых оснований, проведенные учеными, показали, что грунты обладают анизотропными свойствами - неоднородностью фильтрации, деформации, прочности и других характеристик грунтов в разных направлениях [3, 4, 6, 8]. Анизотропные грунтовые основания широко распространены в земной коре. Характерными примерами грунтов, обладающими анизотропными свойствами, являются ленточные глинистые грунты, лессовые грунты и торфы, многолетнемерзлые и засоленные грунты. Установлено, что причиной анизотропии является упорядоченная структура грунтов, обусловленная слоистой или преобладающей ориентацией частиц. Эта структура может быть обусловлена как отдельными процессами накопления слоев грунтов (гравитацией), так и сочетанием условий литогенеза (гравитация, циклическое осаждение, фильтрация, тектонические движения и т.д.). Поскольку указанные обстоятельства существенно отличают поведение анизотропных грунтов под нагрузкой, по сравнению с изотропными грунтами, в расчетах следует учитывать анизотропные свойства грунта, которые существенно влияют на напряженно-деформированное состояние оснований фундаментов и конструкций здания.

Очевидно, учет анизотропных свойств грунта в расчетах может быть осуществлен только на основании экспериментально определенных прочностных и деформационных характеристик анизотропных грунтов. Особенности лабораторных и полевых методов определения этих характеристик подробно рассмотрены в работах [3, 8, 9, 10].

Настоящая работа содержит материал по построению математической модели анизотропного грунтового основания, учитывающей влияние анизотропных свойств грунтового полупространства на напряженно-деформированное состояние фундаментных конструкций. Прочностные и деформационные характеристики грунтов считаются известными. Математическое моделирование осуществляется для частного случая анизотропного грунтового основания – трансверсально-изотропного основания.

Трансверсально-изотропная модель грунтового основания применима к грунтам при наличии плоскости изотропии деформации и оси симметрии вращения, что характерно для большинства анизотропных грунтов и позволяет многим исследователям считать эту модель общепринятой и традиционной. Трансверсально-изотропное основание считаем линейно деформируемой анизотропной средой [3, 6, 10, 11]. В теоретических выкладках рассматриваем грунты, имеющие разный модуль деформации и разные коэффициенты Пуассона в разных направлениях в плоскости изотропии деформации и в направлении, перпендикулярном этой плоскости. В расчетах рассматриваем грунты с одинаковыми коэффициентами Пуассона в разных направлениях в плоскости изотропии деформации и в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Для построения математической модели поведения трансверсально-изотропного грунта под нагрузкой используем основной закон Гука в основной системе координат [5, 12]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, \\ \varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + a_{33}\sigma_z, \\ \gamma_{\theta z} &= a_{44}\tau_{\theta z}, \quad \gamma_{rz} = a_{44}\tau_{rz}, \\ \gamma_{r\theta} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  выражаются через модули деформации и коэффициенты Пуассона следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_r}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E_r}, \quad a_{33} = \frac{1}{E_z}, \\ a_{13} &= -\frac{\nu'}{E_z}, \quad a_{44} = \frac{1}{G_z}, \\ 2(a_{11} - a_{12}) &= \frac{2(1 + \nu)}{E_r} = \frac{1}{G_r}, \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $E_r, E_z$  – модули деформации для напряжений в плоскости изотропии и в направлении перпендикулярном к ней;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости;  $\nu'$  – коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в направлении, нормальном к плоскости изотропии при растяжении в этой плоскости;  $G_r, G_z$  – модули сдвига для плоскостей изотропии и перпендикулярных (радиальных) плоскостей.

Известно [5, 12], что составляющая перемещений в направлении оси  $z$  в цилиндрической системе координат для осесимметричной задачи определяется следующим выражением:

$$w = \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

где

$$\alpha = a_{44}, \quad \gamma = \frac{(a_{11} - a_{12})(a_{33}(a_{11} + a_{12}) - 2a_{13}^2)}{a_{44}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)};$$

$\varphi$  - функция напряжений, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\nabla_1^2 \nabla_2^2 \varphi = 0, \quad (4)$$

где

$$\nabla_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_i^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (i = 1, 2);$$

$s_1, s_2$  - параметры, определенные С.Г. Лехническим следующими соотношениями [5]:

$$s_1 = \sqrt{\frac{a + c + \sqrt{(a + c)^2 - 4d}}{2d}}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{a + c - \sqrt{(a + c)^2 - 4d}}{2d}},$$

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \quad c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2},$$

$$d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}.$$

Если по поверхности трансверсально-изотропного упругого основания (грунтового основания) действует осесимметричная нагрузка  $P(l)$ , функцию напряжений можно выразить следующим интегралом [5]:

$$\varphi = \int_0^\infty (B e^{-s_1 lz} + C e^{-s_2 lz}) J_0(lr) dl, \quad (5)$$

где  $J_0$  - функция Бесселя первого рода нулевого индекса; коэффициенты  $B$  и  $C$  определяются выражениями

$$B = -\frac{y(l)}{l^2} \frac{(1 - as_2^2)\sqrt{d}}{(s_1 - s_2)(ac - d)}, \quad C = \frac{y(l)}{l^2} \frac{(1 - as_1^2)\sqrt{d}}{(s_1 - s_2)(ac - d)};$$

функция  $y(l)$  определяется преобразованием Ганкеля заданной нагрузки

$$y(l) = \int_0^\infty P(x) x J_0(xl) dx. \quad (6)$$

Подставляя (5) в (3), находим составляющую смещений  $w$  в виде выражения

$$w = \frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^{\infty} y(l)(\eta_1 e^{-s_2 lz} - \eta_2 e^{-s_1 lz}) J_0(lr) dl, \quad (7)$$

где

$$\eta_1 = \frac{s_1^2(a - \gamma) + \gamma c/d - 1}{ac - d} \sqrt{d},$$

$$\eta_2 = \frac{s_2^2(a - \gamma) + \gamma c/d - 1}{ac - d} \sqrt{d}.$$

Загрузим трансверсально-изотропное полупространство сосредоточенной силой  $P$  и совместим начало цилиндрической системы координат с точкой приложения нагрузки, а ось  $Z$  направим вниз. Сосредоточенную силу можно представить равномерной нагрузкой, распределенной по площади круга бесконечно малого радиуса  $\varepsilon$ ,  $p = P/(\pi\varepsilon^2)$ . В этом случае функция нагрузки определяется интегралом

$$y(l) = P \int_0^{\infty} x J_0(xl) dx = \frac{P}{\pi\varepsilon l} J_1(\varepsilon l), \quad (8)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого рода индекса один.

Подставляя (8) и  $z = 0$  в выражение (7) и учитывая, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J_1(\varepsilon l)}{\varepsilon l} = \frac{1}{2}$ , находим формулу, определяющую перемещения поверхности трансверсально-изотропного упругого полупространства в виде

$$w = \frac{P\alpha(s_1 + s_2)(a - \gamma)\sqrt{d}}{2\pi(ac - d)r}. \quad (9)$$

Запишем формулу (9) аналогично известному решению Буссинеска [13] для изотропного упругого полупространства

$$w = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi E_K r}, \quad (10)$$

где  $E_K$  – приведенный модуль деформации, определяемый выражением

$$E_K = 2(1 - \nu^2)K^*, \quad (11)$$

где  $K^*$  – обобщенный коэффициент податливости трансверсально-изотропного полупространства вычисляемый по формуле

$$K^* = \frac{ac - d}{\alpha(s_1 + s_2)(a - \gamma)\sqrt{d}}. \quad (12)$$

Применяя выражение (10), можно решить различные задачи по определению напряженно-деформированного состояния фундаментов и конструкций зданий, расположенных на трансверсально-изотропных грунтах основания. Покажем использование приведенного модуля деформации для расчета фундаментных конструкций на примере балки, лежащей на трансверсально-изотропном упругом полупространстве, характеризующемся различными характеристиками деформативности. Решение задачи выполним методом Жемочкина-Синицына [14]. Рассматриваем балку длиной 3,5 м (рис. 1) с прямоугольным сечением  $b \times h = 1 \times 0,3$  м с модулем упругости материала балки  $E = 24000$  кПа. На балку действует вертикальная сосредоточенная сила  $F = 20$  кН.

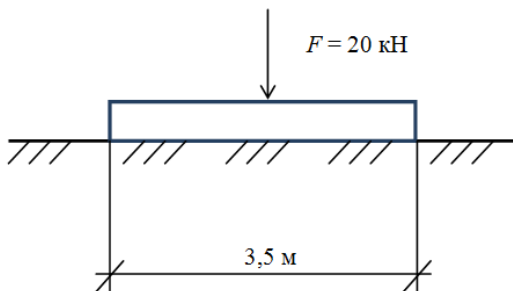


Рис. 1

Основная система метода Жемочкина-Синицына приведена на рис. 2.

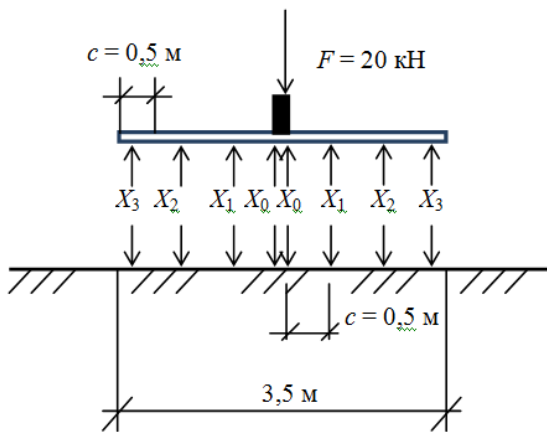


Рис. 2

Для рассматриваемой конструкции при симметричной нагрузке и при размещении заделки в середине балки угол поворота сечения  $\varphi_0 = 0$ . Разбивая балку на семь участков размером  $c = 0,5$  м, имеем пять неизвестных - четыре неизвестные  $X_i$  и смещение по оси  $Z$  в середине балки  $z_0$ . Система уравнений будет выглядеть

$$\left. \begin{aligned} X_0 \delta_{00} + X_1 \delta_{01} + X_2 \delta_{02} + X_3 \delta_{03} + z_0 &= 0 \\ X_0 \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + z_0 &= 0 \\ X_0 \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + z_0 &= 0 \\ X_0 \delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + z_0 &= 0 \\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 &= F/2 \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где

$$\delta_{ij} = V_{ij} + \alpha \omega_{ij}, \quad (14)$$

$V_{ij}$  – перемещение поверхности грунтового основания от единичной силы  $X_j = 1$  по  $i$ -му направлению, вычисляемое по формуле (10);  $\omega_{ij}$  – перемещение балки в основной системе от единичной силы  $X_j = 1$  по  $i$ -му направлению, вычисляемое стандартными методами строительной механики,

$$\alpha = \frac{\pi E_K c^4}{6EI(1 - \nu^2)}, \quad (15)$$

где  $E$  - модуль упругости материала балки;  $I$  – момент инерции сечения балки;  $\nu$  – коэффициент Пуассона грунта.

Для балки, лежащей на трансверсально-изотропном основании с модулями деформации  $E_z = 20$  МПа,  $E_r = 15$  МПа, система уравнений (13) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 4,812X_0 + 1,858X_1 + 0,98X_2 + 0,66X_3 + z_0 &= 0 \\ 1,858X_0 + 2,919X_1 + 1,316X_2 + 0,831X_3 + z_0 &= 0 \\ 0,980X_0 + 1,316X_1 + 2,838X_2 + 1,448X_3 + z_0 &= 0 \\ 0,66X_0 + 0,831X_1 + 1,448X_2 + 3,19X_3 + z_0 &= 0 \\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 &= 10 \end{aligned} \right\},$$

и решение  $X_0 = 1,49$  кН,  $X_1 = 2,83$  кН,  $X_2 = 2,57$  кН,  $X_3 = 3,11$  кН,  $z_0 = -17,0$  м или  $z_{0\text{факт}} = z_0/\alpha = -0,00057$  м.

Аналогичные решения были произведены для рассматриваемой балки на изотропном полупространстве с модулем деформации  $E = 20$  МПа и на трансверсально-изотропном основании с модулями деформации  $E_z = 20$  МПа,  $E_r = 10$  МПа и модулями деформации  $E_z = 20$  МПа,  $E_r = 5$  МПа. Все результаты расчетов по прогибам балки сведены в диаграмму, показанную на рис. 3.



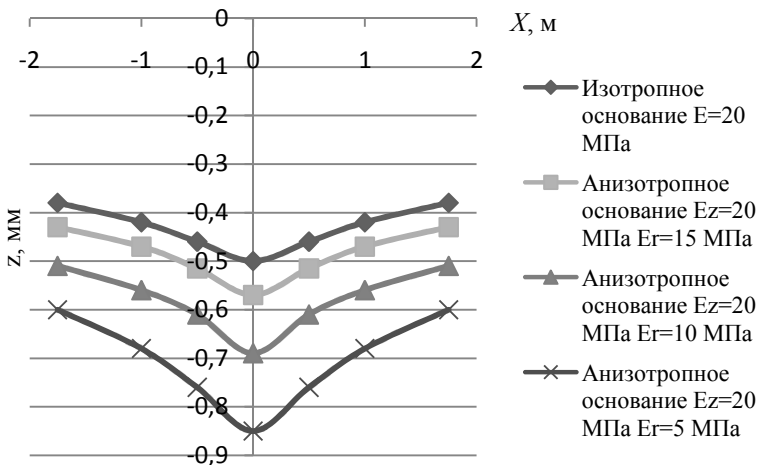


Рис. 3. Вертикальные перемещения балки при различных значениях  $E_r$  и  $E_z$

Установлено, что учет анизотропии при вычислении деформаций существенно изменяет количественные значения этих деформаций. Увеличение вертикальной составляющей деформации балки на трансверсально-изотропном основании с модулями деформации  $E_z = 20$  МПа,  $E_r = 5$  МПа по сравнению с расчетом без учета анизотропии составило 88%. Однако последующие расчеты внутренних силовых факторов с учетом анизотропии грунта не показали значительного изменения моментов и поперечных сил в сечениях балки по сравнению с расчетом на изотропном основании. Максимальный момент в сечении балки при расчете без учета анизотропии составил  $M = 8,73$  кНм, а для балки на трансверсально-изотропном основании с модулями деформации  $E_z = 20$  МПа,  $E_r = 5$  МПа –  $M = 9,15$  кНм, т.е. изменение момента не превысило 5% по сравнению с расчетом без учета анизотропии грунта.

Выполненным исследованием установлено, что использование математической модели трансверсально-изотропного грунтового основания в качестве модели грунтового основания путем учета обобщенного коэффициента податливости  $K^*$  или модуля деформации трансверсально-изотропного основания  $E_k$  в практических расчетах позволяет в большей степени учитывать реальные деформационные свойства грунтов, таких как грунты со слоистой или столбчатой текстурой. Тем самым повышается надежность проектных решений конструкций, зданий и сооружений, а также снижаются возможные риски возникновения дефектов и повреждений из-

за неучтенных стандартными методами расчетов деформаций, вызванных анизотропными свойствами грунтовых оснований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. Введ. 2015-07-01. М.: Стандартинформ, 2019. 16 с.
2. СП 22.13330.2016. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83\*. М.: Стандартинформ, 2017. 154 с.
3. Бугров А.К. Анизотропные грунты и основания сооружений / А.К. Бугров, А.И. Голубев. СПб.: Недра, 1993. 245 с.
4. Tumakov S.A. Research of stress and deformation of the foundation slab of the building taking into account anisotropic soil properties / S.A. Tumakov, G.N. Golub' // International Scientific-Practical Conference on Quality Management and Reliability of Technical Systems. St. Petersburg, 2019. DOI: 10.1088/1757-899X/666/1/012078
5. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
6. Портаев Л.П. Распределение напряжений и перемещений в трансверсально-изотропном грунтовом основании от действия на поверхности полосовой нагрузки // Сборник трудов МИСИ. М.: МИСИ, 1971. №79. С. 129-134.
7. Тумаков С.А. Вынужденные колебания прямоугольных штампов на анизотропном упругом полупространстве / С.А. Тумаков, Л.П. Портаев; Яросл. политехн. ин-т // Депонированные научные работы: библиогр. указ. 1991. № 6. С. 1-9. Деп. в ВНИИТПИ, №10915.
8. Golubev A. Features of Calculation of Consolidation Process of Weak Saturated Soils in View of Their Plastic Properties / A. Golubev, A. Savchenko, L. Akimov, A. Frolov, V. Lvov // MATEC Web of Conferences, 2016. V. 53. art. no. 01025. DOI: 10.1051/mateconf/20165301025. URL: [https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2016/16/mateconf\\_spbwosce2016\\_01025/mateconf\\_spbwosce2016\\_01025.html](https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2016/16/mateconf_spbwosce2016_01025/mateconf_spbwosce2016_01025.html)
9. Коробова О.А. Методология оценки результатов эксперимента дбных исследований деформационной анизотропии нескальных грунтов / О.А. Коробова, Л.А. Максимова, И.Ю. Соловьянова // Изв. вузов. Строительство. Новосибирск: ООО «Абсолют», 2019. № 8. С. 116–128.
10. Wuzhang Luo. Estimating Anisotropic Soil Properties Using Bayesian Kriging / Wuzhang Luo, Teng Xuan, Jinhui Li // Conference: Geo-Risk. 2017. DOI: 10.1061/9780784480717.035
11. Chunquan Dai . Study on the Ultimate Supporting Force of Shield Excavation Face Based on Anisotropic Strength / Chunquan Dai, Hongtao Sui, Chao Ma Theory // Applied Sciences 2020. 10(15). 5222. DOI:10.3390/app10155222
12. Hu Hai-chang. On the Three-dimensional Problems of the Theory of Elasticity of a Transversely Isotropic Body // Acta physica sinica. 1953. 9(2). P. 130-147 (in Chinese). URL: <http://wulixb.iphy.ac.cn/en/article/doi/10.7498/aps.9.130>
13. Boussinesq J. Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et mouvement des solides élastiques. Paris: Gauthier-Villard, 1885. 722 p.
14. Жемочкин Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Синицын. М.: Госстройиздат, 1962. 240 с.

УДК 51-7:66.095.132.001.57

**М. А. Червочкин<sup>1</sup>, М. С. Белинов<sup>1</sup>, О. В. Малышкина<sup>1</sup>,  
В. В. Соловьев<sup>1</sup>, В. В. Губич<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Ярославский государственный технический университет  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: Mchervochkin@yandex.ru, solovyovvv@yustu.ru*  
<sup>2</sup> ООО «Энергостройсервис»  
Россия, г. Ярославль, *e-mail: Yarmis@yandex.ru*

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА  
ЭТЕРИФИКАЦИИ БУТИЛОВОГО СПИРТА ЖИРНЫМИ  
КИСЛОТАМИ ТАЛЛОВОГО МАСЛА ПРИ ОПЫТНО-  
ПРОМЫШЛЕННОМ ПОЛУЧЕНИИ ЭКОЛОГИЧЕСКИ  
ЧИСТОГО БИОТОПЛИВА**

*В работе представлено математическое описание процесса этерификации бутилового спирта жирными кислотами таллового масла, реализованное на опытно-промышленной установке получения экологически чистого биотоплива. Использование расчетных данных в промышленных условиях позволило оптимизировать работу установки, повысить выход эфиров жирных кислот, снизить давление в технологических реакторах, уменьшить температуру и время проведения процесса в каждом из них.*

**Ключевые слова:** эфиры жирных кислот, биодизельное топливо, жирные кислоты таллового масла, бутиловый спирт, этерификация, математическая статистика

**M. A. Chervochkin<sup>1</sup>, M. S. Belinov<sup>1</sup>, O. V. Malyshkina<sup>1</sup>,  
V. V. Solovyov<sup>1</sup>, V. V. Gubich<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Yaroslavl State Technical University  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: Mchervochkin@yandex.ru, solovyovvv@yustu.ru*  
<sup>2</sup> ООО «Energostroyservice»  
Russia, Yaroslavl, *e-mail: Yarmis@yandex.ru*

**MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE PROCESS OF  
ESTERIFICATION OF BUTYL ALCOHOL BY FATTY ACIDS  
OF TALL OIL IN THE PILOT PRODUCTION OF  
ENVIRONMENTALLY FRIENDLY BIOFUELS**

*The paper presents a mathematical description of the process of esterification of butyl alcohol by fatty acids of tall oil, implemented at a pilot plant for the production of environmentally friendly biofuels. The use of calculated data in industrial conditions*

*made it possible to optimize the operation of the plant, increase the yield of fatty acid esters, reduce the pressure in technological reactors, reduce the temperature and time of the process in each of them.*

**Keywords:** *esters of fatty acids, biodiesel, tall oil fatty acids, butyl alcohol, esterification, mathematical statistics*

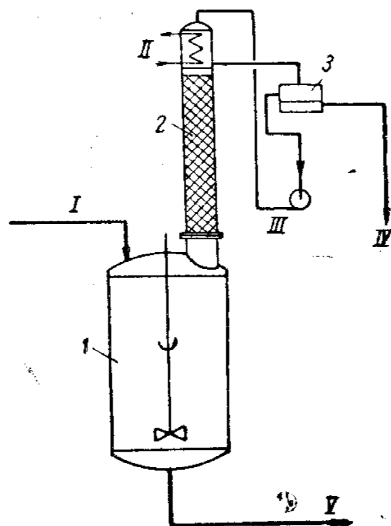
Эфиры жирных кислот широко используются в химической технологии как промежуточные вещества, а также находят применение как готовые продукты: пластификаторы, пленкообразующие компоненты лакокрасочных покрытий, фармацевтические препараты и т.д. [1]. Однако основным потребителем товарных бутиловых эфиров жирных кислот во всем мире, а в ближайшем будущем и в Российской Федерации, является биотопливо, которое в полной мере выступает полноценным заменителем нефтяного дизельного топлива с минимальным карбоновым следом [2]. В количественном отношении из всех видов бутиловых эфиров первое место занимают метиловые или этиловые эфиры синтетических жирных кислот, объем производства которых и дальше будет увеличиваться [3]. Но они в отличие от традиционных нефтяных дизельных топлив быстрее затвердевают при низких температурах и по этой причине малоэффективны для большинства территорий Российской Федерации, особенно для районов крайнего севера. Использование жирных кислот таллового масла - побочного продукта лесохимической переработки древесины, являющегося практически не застывающим продуктом при температурах ниже 35–40 °С, а также использование бутилового спирта в качестве одного из этерифицирующих агентов также способствует низкотемпературным свойствам биодизельного топлива, что в полной мере может решить проблему использования биотоплива для дизельных двигателей в районах крайнего севера.

В ранее опубликованных работах [4, 5] предлагались методы получения бутиловых эфиров с использованием катализаторов процесса: серной кислоты, бензолсульфокислоты, паротолуолсульфокислоты и др. При температуре 100–110 °С с использованием этих катализаторов, хотя и достигается высокая степень превращения, однако для крупнотоннажного производства биотоплива возникает проблема с частичным сульфированием ими исходных жирных кислот таллового масла по имеющимся в них ненасыщенным фрагментам. Также требуется обязательная технологическая стадия выделения отработанных катализаторов, которые являются потенциальными загрязнителями окружающей среды, что существенно удорожает процесс получения биодизеля. Поэтому в настоящей работе был рассмотрен процесс термического превращения жирных кислот таллового масла и технического бутилового спирта. К тому же безкатализаторное осуществление процесса позволяет относительно легко переводить периодический процесс этерификации в непрерывный.

На начальном этапе исследований процесс этерификации было предложено осуществлять в проточной системе при температуре 160–200 °С, давлении 8–5 атм, времени пребывания реагентов в зоне реакции до 40–50 ч и мольном соотношении бутанол: жирные кислоты таллового масла, равном (2-2,5) : 1 [6, 7].

Для интенсификации осуществления реакции этерификации и приближения ее к теоретически возможной степени превращения было предложено проводить процесс в две стадии с отбором на каждой из них образовавшейся воды в виде азеотропа бутанол – вода. При этом на каждой стадии процесс этерификации вели с отводом реакционной воды при температуре выше температуры кипения бутилового спирта под повышенным давлением, создаваемым парами избыточного бутанола. Наличие избытка бутилового спирта, сверх необходимого по стехиометрическому уравнению реакции, и постоянный отвод реакционной воды из зоны этерификации способствовали смещению реакции в сторону образования целевых продуктов реакции - бутиловых эфиров.

Принципиальная технологическая схема данного процесса изображена на рис. 1.



**Рис. 1. Принципиальная технологическая схема получения эфиров жирных кислот таллового масла в аппарате с насадочной ректификационной колонкой:**

*I* – жирные кислоты таллового масла и бутанол; *II* – вода;  
*III* – водный бутанол; *IV* – бутанольная вода; *V* – эфиры

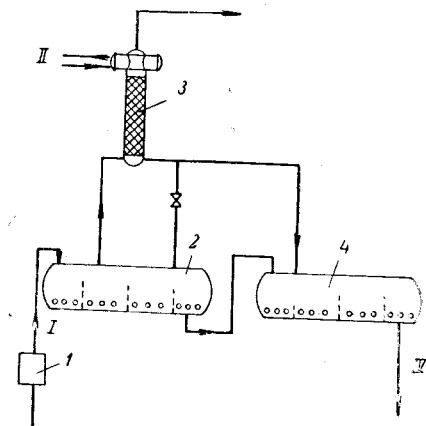
Процесс этерификации для предотвращения диффузионной области протекания реакции было предложено осуществлять в опытно-промышленном аппарате, снабженном мешалкой вращающейся со скоростью 400 об/мин. Для отбора азеотропной смеси бутиловый спирт-вода, аппарат снабжен насадочной ректификационной колонкой с дефлегматором. Предварительными опытами было показано, что при таком технологическом оформлении процесса, реакция этерификации может проводиться при температуре от 150 до 200 °С и даже выше, а давление в системе может быть поднято до 10 атм.

Именно при таких условиях, подача в реактор 1 жирных кислот таллового масла и бутанола (мольное соотношение ~ 1 : 2) может производиться одновременно. Всеми дальнейшими исследованиями было показано, что именно при таком режиме, в процессе можно использовать бутиловый спирт с содержанием воды от 10 до 20% мас.

В ходе проведения процесса этерификации реакционная вода и вода, поступающая с исходным бутиловым спиртом, отгоняется через колонну 2. Орошение производится за счет дефлегмации и возвращения бутанола после расслоения в разделительной емкости 3. При достижении кислотного числа 15–20 мг КОН/г бутанол полностью отгоняется, а эфиры выдавливаются азотом в промежуточную емкость. Непрореагировавшие кислоты омыляются водным раствором щелочи от эфиров и отгоняются на центрифуге в виде натриевых мыл. На последней стадии из эфиров удаляется при небольшом вакууме влага. Полный цикл этерификации продолжается 40–45 ч. Натриевые мыла разлагают серной кислотой, а полученные жирные кислоты возвращают в процесс.

Многочисленное дублирование экспериментальных результатов свидетельствовало о хорошем качестве получаемых эфиров. С 1 м<sup>3</sup> геометрического объема этерификатора получается до 0,1 м<sup>3</sup>/ч готовых эфиров. Процесс очень простой и экономичный по энергетическим затратам и материалам. Потери бутанола составляют не более 40 кг на 1 т эфиров. Недостатком процесса является малая производительность этерификатора, периодичность процесса и загрязнение сточных вод сульфатом натрия, а также другими продуктами, присутствующими в исходных жирных кислотах таллового масла.

С учетом этих недостатков на имеющемся опытно-промышленном оборудовании было предложено осуществить известный непрерывный процесс получения бутиловых эфиров на основе синтетических жирных кислот C<sub>10</sub>–C<sub>13</sub>, реализованный на Щебекинском химическом комбинате [8], технологическая схема которого изображена на рис. 2.



**Рис. 2. Технологическая схема получения эфиров жирных кислот (2-й вариант):**

*I* – кислоты  $C_{10}$ – $C_{13}$ ; *II* – вода; *III* – бутанол на регенерацию;  
*IV* – эфиры на рафинацию

Процесс в этом случае осуществляется в двух последовательно соединенных этерификаторах при температуре 150–200 °С и давлении 5–6 атм. Бутанол и жирные кислоты таллового масла вместо синтетических кислот  $C_{10}$ – $C_{13}$  подаются в диафрагмовый смеситель 1, где происходит частичная этерификация последних. Массовое соотношение жирных кислот таллового масла и бутанола (1 : 1,2) – (1 : 1,3); мольное – (1 : 2,5)–(1 : 3). Из смесителя смесь поступает в этерификатор 2, представляющий собой горизонтальный цилиндрический аппарат с тремя перегородками. Для поддержания необходимой температуры каждая секция этерификатора снабжена дифенильным обогревающим теплообменником и двумя водяными охлаждающими змеевиками. Наличие перегородок разной высоты и конвекции за счет разности температур интенсифицирует процесс этерификации жирных кислот таллового масла бутанолом. Реакционная вода с избытком бутанола выводится из этерификатора 2 через насадочную колонну 3 на регенерацию, а часть бутанола с низа колонны поступает во второй этерификатор, где должен происходить процесс завершающей этерификации.

Однако, несмотря на кажущуюся очевидность увеличения выхода бутиловых эфиров таллового масла с периодическим процессом, реализованная в опытно-промышленном масштабе установка непрерывного действия давала более низкую глубину превращения кислот в эфиры.

В этой связи была предпринята попытка оптимизировать непрерывный процесс получения бутиловых эфиров жирных кислот таллового мас-

ла с использованием метода математической статистики. Для этого были проведены исследования по разработке математической модели процесса этерификации жирных кислот таллового масла бутиловым спиртом методом пассивного эксперимента на проточной установке с многократно повторяющейся производительностью по кислотам  $2 \pm 0,2$  л/ч. Степень этерификации жирных кислот определялась по величине остаточного кислотного числа в бутиловых эфирах.

По предварительным параллельным опытам, проведенным на одном режиме, была определена абсолютная погрешность эксперимента. Это дало возможность определить число параллельных опытов, необходимых в каждом режиме, задавшись заведомо определенной ошибкой эксперимента.

В ходе дальнейшего проведения исследований в каждом режиме процесса этерификации ставилось по пять параллельных опытов, что обеспечивало абсолютную погрешность по кислотному числу  $\pm 0,9$  мг КОН/г. Определялась зависимость величины кислотного числа от следующих входных параметров: температуры, давления, расхода жирных кислот таллового масла, расхода бутилового спирта.

Аппроксимация осуществлялась методом последовательного исключения составляющих функций. Результирующее уравнение представлялось в виде аппроксимирующей функции Брандона [9]

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m) = \prod_{i=1}^m f_i(X_i),$$

где  $m$  – число независимых переменных. Характер каждой частной функции  $f_i$  для каждого входного параметра  $X_i$  определялся в виде полинома четвертого порядка:

$$f_i(X_i) = a_{i0} + a_{i1}X_i + a_{i2}X_i^2 + a_{i3}X_i^3 + a_{i4}X_i^4.$$

Аппроксимация осуществлялась на ЭВМ с применением пакета прикладных программ «Excel». Определение составляющих функций и операции исключения выполнялись с достаточно высокой точностью, поэтому результирующая аппроксимирующая функция довольно точно отражала свойства исследуемой зависимости.

Эксперимент на опытной установке ставился по двум разным стадиям процесса: этерификации (в первом реакторе) и завершающей этерификации (во втором реакторе). Поэтому обработка экспериментальных данных и получение математического описания велись по обеим стадиям раздельно. Ранее на опытной установке были отработаны пределы изменения входных параметров, обеспечивающих достаточно высокую степень превращения. Интервалы варьирования входных параметров для обеих стадий процесса были следующие:



Температура  $X_1$ .....180–240 °С.

Давление  $X_2$ .....3–5 атм.

Расход, мл/ч:

жирных кислот таллового масла  $X_3$ .....1000–2500,

бутилового спирта  $X_4$ :

на стадии этерификации.....750–1200,

на стадии завершающей этерификации....350–1000.

В результате проведенной работы по аппроксимации функции  $Y = f(X_1, X_2, X_3, X_4)$  для обеих стадий процесса были получены следующие зависимости:

– для стадии этерификации

$$Y_1 = 14,61 \times (3,98 - 0,01592X_1) \times \{1,48 - 0,1492X_2 + (0,000101X_2)^4\} \times \{1,02 + (0,364X_3)^4 \cdot 10^{-12}\} \times \{-3,6 - (0,2218X_4)^4 \cdot 10^{-12} + 0,00694X_4\}; \quad (1)$$

– для стадии окончательной этерификации

$$Y_2 = 4,2325 \times \{16,98 - (0,182X_1^4)10^{-7} + (0,1104X_1^3)10^4 - 0,00191X_1^2\} \times \{0,96 - 0,64X_2^4 \cdot 10^{-4}\} \times \{0,92 + (0,724X_3^4)10^{-12}\} \times \{0,944 + (0,916X_4^4) \cdot 10^{-12} - (0,714X_4^3) \cdot 10^{-8}\}. \quad (2)$$

Среднеквадратичное отклонение, отнесенное к среднему значению выходного значения параметра, для уравнения (1) составляло 20%, а для уравнения (2) 12%.

Таким образом, в условиях опытно-промышленной установки было получено приближенное математическое описание процесса этерификации жирных кислот таллового масла бутиловым спиртом. Реализация расчетных данных в промышленных условиях позволила существенно увеличить степень превращения жирных кислот таллового масла в бутиловые эфиры. Так, продукты реакции этерификации из первой секции этерификатора 2 имели кислотное число 14–17 мг КОН /г (до оптимизации их кислотное число было 25–30 мг КОН /г), содержание воды достигало 1% , а бутанола 30–40%. При этих условиях за счет разности давлений частично этерифицированные продукты самопроизвольно перетекают во второй этерификатор 4, где при давлении 5–6 атм (до оптимизации было 7–8 атм) и температуре 150 °С (до оптимизации было 200 °С) протекает процесс окончательной этерификации. Реакция этерификации в этом аппарате заканчивается через 2–4 ч (до оптимизации было 8–14 ч). Из последней секции этерификатора 4 эфиры с кислотным числом 5–7 мг КОН/г (до оптимизации было 15–18 мг КОН /г), содержанием бутанола до 10% и воды 1,5-2% направляются в ректификационную колонну для отгонки избыточного бутанола. Свободные жирные кислоты (кислотное число эфиров после отгонки бутанола составляет 7–10 мг КОН/г) из эфиров выводятся омылением щелочью. На последней стадии эфиры подвергаются осушке и дистилляции.

Таким образом, математическое описание процесса этерификации бутилового спирта жирными кислотами таллового масла при опытно-промышленном получении экологически чистого биотоплива позволило оптимизировать работу установки, повысить выход эфиров жирных кислот, снизить давление в технологических реакторах, уменьшить температуру и время проведения процесса в каждом из них.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сафронов С.П. Сложноэфирные пластифицирующие композиции из возобновляемого растительного сырья: автореф. дис. ... канд. хим. наук: 05.17.04. Волгоград, 2016. 24 с.
2. Производство важнейших органических продуктов // Bstudy.net: сайт. URL: [https://bstudy.net/961908/tehnika/proizvodstvo\\_vazhneyshih\\_organicheskikh\\_produktov](https://bstudy.net/961908/tehnika/proizvodstvo_vazhneyshih_organicheskikh_produktov).
3. Пермякова И.А. Переработка жиросодержащих отходов с помощью кислотно-катализируемой реакции этерификации в условиях регулируемого фазового состояния реакционных систем / И.А. Пермякова, Е.А. Касаткина, Г.В. Леонтьева, В.В. Вольхин // Бутлеровские сообщения. 2018. Т.54, № 4. С. 56–74.
4. Альтернативные топлива из нетрадиционных источников сырья. / О.В. Вахромеева, А.Е. Головков, Н.В. Гасанова, А.В. Павлов, В.В. Соловьев. // Путь в науку. Актуальные проблемы биологии, экологии и химии: тез. докл. Всерос. молодёж. науч. конф., 16 апр. 2020 г., Ярославль / сост. С. Н. Леднев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2020. С. 20.
5. Переработка отходов лесохимической промышленности как вариант рациональной организации технологического процесса в рамках зеленой химии с получением сырья для синтеза различных органических соединений. / О.В. Вахромеева, А.Е. Головков, А.С. Салтыков, В.В. Губич, В.В. Соловьев. // Путь в науку. Актуальные проблемы биологии, экологии и химии : тез. докл. Всерос. молодёж. науч. конф., 16 апр. 2020 г., Ярославль / сост. С. Н. Леднев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2020. С. 21.
6. Червочкин М.А. Изучение процесса переработки отходов ЦБК, представленных жирно-кислотными составляющими в альтернативные биотоплива / М.А. Червочкин, С.В. Крапивина, В.В. Соловьев. // Всерос. конф. с междунар. участием «Проблемы и инновационные решения в химической технологии» (ПИРХТ-2019), 7–9 октября 2019 г, г. Воронеж. 2019. 73–74.
7. Корбан М.Ф. Перспективы и технология получения биокomпонентов для нефтяных топлив из альтернативного кислородсодержащего сырья. / М.Ф. Корбан, Ю.Н. Воронцова, В.В. Соловьев. // Шестьдесят седьмая Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием. 16 апреля 2014 г., Ярославль. Ч. 1: тез. докл. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. С. 145.
8. Окисление парафина в жирные кислоты и спирты // Справочник химика 21. Химия и химическая технология: сайт. URL: <https://www.chem21.info/info/1737084/>
9. Ордынцев В.М. Автоматизация математического описания объектов управления. М.: Машиностроение, 1969. 207 с.

УДК 51-7:624.073.5

**И. В. Войтко, А. Р. Шкадова**

Государственный университет морского и речного флота  
им. адмирала С.О. Макарова  
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: nyttt@rambler.ru

**ИССЛЕДОВАНИЕ В СРЕДЕ MAPLE  
НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ПЛОСКОГО ЗАТВОРА ШЛЮЗА  
ПО КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНОЙ МОДЕЛИ**

*В статье описывается методика приближенного определения напряженно-деформированного состояния плоского затвора гидротехнического сооружения (ГТС) при изгибе под действием гидростатического давления. Затвор с ребрами жесткости рассматривается как конструктивно-ортотропная пластина. Используется метод Бубнова-Галеркина с применением двойных тригонометрических рядов. Приводятся результаты расчета напряжений и деформаций в среде Maple.*

**Ключевые слова:** плоский затвор ГТС, ребра жесткости, конструктивно-ортотропная пластина, напряжение, деформация

**I. V. Vojtko, A. R. Shkadova**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping  
Russia, Saint-Petersburg, e-mail: nyttt@rambler.ru

**STUDY OF MODE OF DEFORMATION OF PLAIN SLUICE  
GATE MODELED AS CONSTRUCTIVE-ORTHOTROPIC  
PLATE USING THE SYSTEM OF MAPLE MATH SOFTWARE**

*The approximate method for analyzing mode of deformation of waterside structure plain gate running on a bend under hydrostatic pressure is considered. The plain gate with webbing is modeled as constructive-orthotropic plate. The calculation is performed by the Bubnov-Galerkin method, using double trigonometric series. The results of calculation of stress and deformation within the system of Maple math software are shown.*

**Keywords:** waterside structure, plain gate, webbing, constructive-orthotropic plate, stress, deformation

Настоящая работа посвящена разработке одного из методов расчета плоских затворов гидротехнических сооружений (ГТС). Приведены результаты теоретических расчетов плоского затвора под действием гидростатической нагрузки по конструктивно-ортотропной модели. В среде Maple разра-

ботана программа расчета прогиба, усилий, напряжений и деформаций плоских затворов шлюзов с различным количеством и жесткостью подкрепляющих равноотстоящих ребер в условиях приложения гидростатической нагрузки. Метод применим и для расчета затворов плотин (рис. 1).



Рис. 1. Плоские затворы плотины

Как известно, жесткость ортотропной пластины различна в перпендикулярных направлениях. Конструкция затвора представляет собой жесткую прямоугольную пластину, усиленную системой взаимно перпендикулярных ребер – продольных (ригелей) и поперечных (стоек), приваренных к листу обшивки. Конструктивно-ортотропная модель усредняет (сглаживает) действие ребер по площади пластины. Моделирование ребристой пластины как ортотропной было предложено Ю.А. Шиманским и развито В.А. Постновым [1].

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины представляет собой модифицированное уравнение Софии Жермен и имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y). \quad (1)$$

Здесь  $w = w(x, y)$  – прогиб срединной плоскости пластины;  $q(x, y)$  – распределенная нагрузка;  $D_3$  – жесткость пластины на кручение;  $D_1$  и  $D_2$  – жесткости пластины на изгиб, причем

$$D_1 = D + \frac{EJ_y}{b_0}; \quad D_2 = D + \frac{EJ_x}{a_0}; \quad D_3 = D + \frac{1}{2} \left( \frac{GJ_{kp,y}}{b_0} + \frac{GJ_{kp,x}}{a_0} \right), \quad (2)$$

где  $E$  – модуль упругости изотропного материала пластины и ребер;  $J_x$  и  $J_y$  – моменты инерции сечений продольных и поперечных ребер соответственно;  $a_0, b_0$  – расстояния между ребрами в направлениях  $x$  и  $y$  (рис. 2);  $D$  – цилиндрическая жесткость самой изотропной пластины, которая усиливается ребрами;  $GJ_{кр,y}$  и  $GJ_{кр,x}$  – жесткости ребер на кручение [1]. При таком подборе жесткостей уравнение (1) описывает изгиб «эквивалентной» ортотропной пластины толщиной  $h$  (это толщина обшивки), но с усредненными упругими свойствами, включающими в себя свойства самой пластины и ребер. При отсутствии обшивки ( $D = 0$ ) уравнение (1) приближенно описывает изгиб частой балочной клетки.

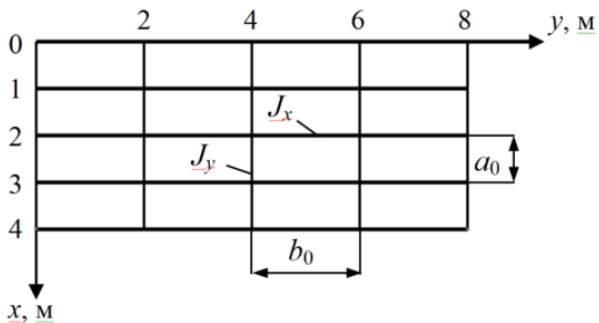


Рис. 2. Конструкция плоского затвора с равноотстоящими ригелями и стойками

В ортотропной модели было положено

$$\mu_{xy} = \mu, \mu_{yx} = \frac{\mu J_y a_0}{J_x b_0}. \quad (2)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона материала обшивки и ребер;  $\mu_{xy}$  – коэффициент относительной поперечной деформации в направлении  $x$ , вызванной продольной деформацией  $\sigma_y/E_y$  ( $\mu_{yx}$  – аналогично). Учитывались соотношения  $b_0 J_x \gg a_0 J_y$  и  $E_x \mu_{xy} = E_y \mu_{yx}$  [1].

При закрытом затворе ГТС нагрузка на затвор (давление воды в горизонтальном направлении, увеличивающееся с ростом глубины) выражается формулой

$$q(x, y) = q(x) = \rho g(x + L), \quad (3)$$

где  $L$  – глубина верхнего края затвора;  $\rho$  – плотность воды;  $g$  – ускорение свободного падения.

На рис. 3 затвор показан в профиль, по оси  $z$  отложена толщина пластины  $h$ , УВ – уровень воды, УН – уровень водяного напора.

Решение уравнения (1) искалось в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (4)$$

где  $a$  и  $b$  – длина и ширина затвора;  $w_{mn}$  – неизвестные коэффициенты Фурье.

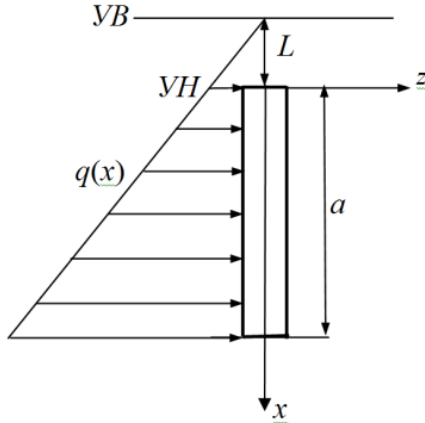


Рис. 3. Плоский затвор под действием гидростатического давления

В случае скользящих или колесных опорно-ходовых частей плоско-го затвора задавались следующие граничные условия задачи: шарнирно-опертый контур пластины по всем четырем сторонам. В этом случае на границе пластины прогиб и изгибающий момент равны нулю. В случае ряда (4) эти условия удовлетворяются автоматически.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Разложим нагрузку (3) в ряд, аналогичный (4):

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $q_{mn}$  найдем по известной формуле для двойного тригонометрического ряда:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dy dx =$$

$$= \frac{4k}{\pi^2 mn} [1 - (-1)^n] [L - (a + L)(-1)^m]. \quad (7)$$

Подставив (4) и (6) в основное уравнение (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых произведениях синусов, получим коэффициенты разложения в ряд прогиба  $w$ :

$$w_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \left[ D_1 \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2D_3 \left( \frac{mn}{ab} \right)^2 + D_2 \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right]}.$$

Подставив их в ряд (4), найдем прогиб пластины. А когда известен прогиб, по формулам

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8)$$

$$\sigma_x = \frac{E_x (\varepsilon_x + \mu_{xy} \varepsilon_y)}{1 - \mu_{xy} \mu_{yx}}, \quad \sigma_y = \frac{E_y (\varepsilon_y + \mu_{yx} \varepsilon_x)}{1 - \mu_{yx} \mu_{xy}}, \quad \tau_{xy} = G_{xy} \gamma_{xy} \quad (9)$$

можно найти деформации и напряжения, а также моменты и поперечные силы в плоском затворе:

$$M_x = -D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$M_{xy} = -D_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$Q_x = -D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}; \quad Q_y = -D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}.$$

В среде Maple были сделаны расчеты варианта конструкции плоско-го затвора (табл. 1). Использовалась конструкция затвора со следующими параметрами. Материал – сталь с модулем Юнга  $E = 2,2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ . Размеры затвора: высота  $a = 4$  м, ширина  $b = 8$  м. Расстояние между горизонтальными ребрами (ригелями)  $a_0 = 1$  м, вертикальными (стойками)  $b_0 = 2$  м (рис.2).

Другие параметры затвора указаны в табл.1.

Таблица 1. Параметры плоского затвора

Толщина обшивки, м	Глубина верхней кромки $L_z$ , м	Момент инерции сечения ригелей $J_x$ , $M^4$	Момент инерции сечения стоек $J_y$ , $M^4$	$J_{кр. x}$ , $M^4$	$J_{кр. y}$ , $M^4$	Расположение ригелей, м	Расположение стоек, м
0,012	6	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$0,341 \cdot 10^{-3}$	$12,6 \cdot 10^{-6}$	$0,55 \cdot 10^{-6}$	0, 1, 2, 3, 4	0, 2, 4, 6, 8

Сечения ребер (ригелей и стоек) схематично показаны на рис. 4, где размеры указаны в миллиметрах. Цифра 6 внизу означает половину толщины обшивки  $h$ , т.к. моменты инерции сечений ребер вычисляются относительно осей  $x$  и  $y$ , проведенных в срединной плоскости пластины.

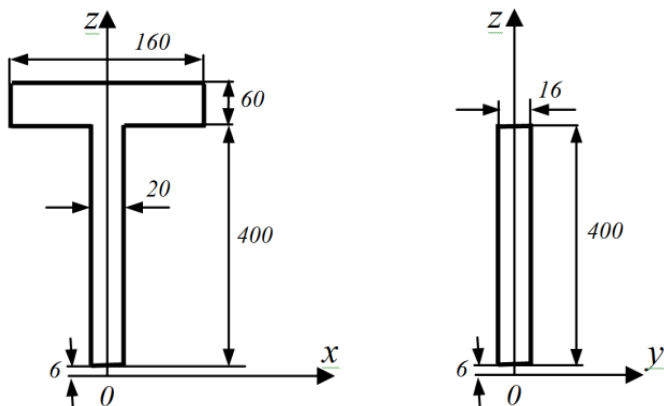


Рис. 4. Схема сечений ригелей и стоек

Моменты инерции сечений вычислялись в Maple по известным формулам:

$$J_x = \iint_{S_1} z^2 dz dx; \quad J_y = \iint_{S_2} z^2 dz dy :$$

$$J_x := \int_{-0.01}^{0.01} \left( \int_{0.006}^{0.4} z^2 dz \right) dx + \int_{-0.08}^{0.08} \left( \int_{0.4}^{0.46} z^2 dz \right) dx;$$

$$J_x := 0.002204585227;$$



$$Jy := \int_{-0.008}^{0.008} \left( \int_{0.006}^{0.4} z^2 dz \right) dy;$$

$$Jy := 0.0003413321813.$$

Расчеты остальных характеристик сечений показали, что жесткость профиля на кручение  $GJ_{кр}$  на три порядка меньше, чем жесткости на изгиб  $EJ$ . Жесткость  $D_3$ , определяемая равенством (2), для данных конструкций затворов оказывается значительно меньше  $D_1$  и  $D_2$ , поэтому среднее слагаемое в знаменателе фундаментального уравнения Софи Жермен (1) играет второстепенную роль.

При расчёте прогиба по формуле (4) удерживалось 100 членов ряда ( $m, n = 1 \dots 10$ ). Ниже приведены графики прогиба, некоторых деформаций, напряжений, моментов и поперечных сил, а также избранные сечения при трёх значениях координаты  $y$  (рис. 5-10).

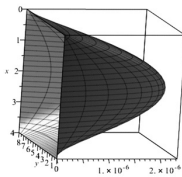


Рис. 5. Прогиб пластины

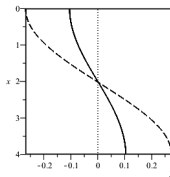


Рис. 6. Крутящий момент в сечениях  $y = 1, y = 2, y = 4$

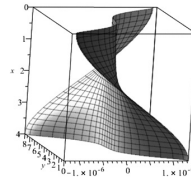


Рис. 7. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$

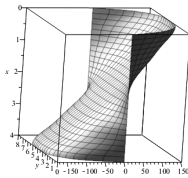


Рис. 8. Поперечная сила  $Q_x$

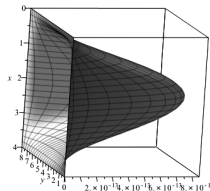


Рис. 9. Деформация  $\varepsilon_x$

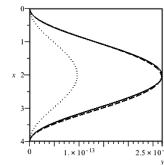


Рис. 10. Деформация  $\varepsilon_y$  в сечениях  $y = 1, y = 2, y = 4$

Конструктивно-ортотропная модель позволяет быстро оценить НДС затвора и ребер жесткости, при этом жесткость подкрепляющих ребер равномерно распределена по обшивке. Однако применение этой модели ограничено геометрией затвора. Для пластин с неравномерным расположением ребер можно применить модель с  $\delta$ -функцией Дирака.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Строительная механика корабля и теория упругости. Т.2 / В.А. Постнов [и др.]. Л.: Судостроение, 1987. 416 с.
2. Чугаев Р.Р. Гидротехнические сооружения. Водосливные плотины. М.: 1985. 302 с.
3. *Голоскоков Д.П.* Применение конструктивно-ортотропной модели ребристой пластины к исследованию НДС плоского затвора ГТС / Д.П. Голоскоков, А.Р. Шкадова // Научные труды: сб. СПГУВК. СПб.: Изд-во СПГУВК, 1998. С. 60–63.
4. *Голоскоков Д.П.* Модель судового перекрытия как конструктивно-ортотропной пластины // Вестник ГУМРФ. 2016. Вып.1(35). С. 189–197.

# Содержание

## МАТЕМАТИКА

1. **Абрамов В.В.** Устойчивость нулевого решения периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром..... 3
2. **Башкин М.А.** Однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом  $CP_{7,5,2,2}^{14}$ ..... 10
3. **Большаков Ю.И.** Об одном идеале мультипликативной полу-группы  $R^{n \times n}$  ..... 15
4. **Лискина Е.Ю.** О достаточных условиях существования периодических решений в критическом случае у динамической системы с нелинейностью четной степени..... 18
5. **Ройтенберг В.Ш.** Бифуркации аттрактора из двух седел и их сепаратрис динамической системы с центральной симметрией.... 27

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

6. **Белецкая Н.В., Джилова М.И., Хачлаев Т.С.** Особенности проведения практических занятий по курсу обыкновенных дифференциальных уравнений в дистанционном формате..... 35
7. **Белякова Л.В., Гулевич Н.М., Кузнецов В.О., Старостина С.А.** Дистанционная олимпиада первокурсников ГУМРФ по элементарной математике в 2021 году..... 42
8. **Бурцев А.И., Башкин М.А., Васильева А.В., Берзина Л.В.** Задачи всероссийской студенческой олимпиады по математике, посвященной 950-летию г. Рыбинска..... 51
9. **Бурцев А.И., Башкин М.А., Берзина Л.В., Васильева А.В.** Анализ результатов олимпиадных задач..... 57
10. **Бухенский К.В., Новиков А.И., Сафошкин А.С.** Об истории студенческих математических олимпиад в РГРТУ..... 65
11. **Гохберг Г.С.** Реализация расширения для удаленного заполнения документов в среде «1С:Предприятие» ..... 69
12. **Жаров А.Н., Миничева И.Г.** Об изложении метода конечных элементов для расчета деформаций в стержневых системах..... 74
13. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** Опыт проведения студенческой онлайн-олимпиады по математике..... 81
14. **Оленикова Ю.К., Ройтенберг В.Ш.** Задания и итоги Всероссийской студенческой олимпиады по математике 2021 года..... 88
15. **Ушенин М.В., Шевцова А.И.** Геометрические задачи в преподавании дифференциальных уравнений первого порядка ..... 96

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

16. **Балунов А.И., Смирнов М.А.** Алгоритмы и программный комплекс расчета колонн ректификации на основе энтропийного метода описания процесса ..... 107
17. **Белинов М.С., Гончарова М.А., Червочкин М.А., Соловьев В.В.** Разработка статистической модели опытно-промышленного реактора непрерывного карбонатного омыления жира..... 120
18. **Васильева А.В.** О применении метода баланса мощностей в построении математической модели напряженно-деформированного состояния..... 129
19. **Дмитриев К.Е., Соловьев М.Е.** Прогнозирование термодинамических свойств жирных кислот и их эфиров методом аддитивно-групповых вкладов..... 136
20. **Максимов Д.С., Балунов А.И.** Выбор термодинамически оптимального порядка фракционирования газов в системе колонн ректификации..... 143
21. **Тумаков С.А., Голубь Г.Н., Теренина Г.Ю.** Математическая модель трансверсально-изотропного грунтового основания при расчете фундаментных балок..... 153
22. **Червочкин М.А., Белинов М.С., Малышкина О.В., Соловьев В.В., Губич В.В.** Математическое описание процесса этерификации бутилового спирта жирными кислотами таллового масла при опытно-промышленном получении экологически чистого биотоплива..... 162
23. **Войтко И.В., Шкадова А.Р.** Исследование в среде Maple напряженно-деформированного состояния плоского затвора шлюза по конструктивно-ортотропной модели..... 170

Научное издание

**МАТЕМАТИКА  
И  
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

**ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

**Выпуск 17**

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 21.02.22. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.  
Гарнитура Таймс. Офсетная печать  
Усл. печ. л. 10,46. Уч.-изд. л. 10,42. Тираж 25. Заказ 5.

Ярославский государственный технический университет  
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Отпечатано в Копировальном центре ЯГТУ  
152023, Ярославль, Московский пр., 88